Válogatott fejezetek az analízisből 8. gyakorlat (nov. 9.)

Hétfő 10:00-ig írjátok meg, mely feladatokat tudtátok megcsinálni.

44. Legyenek X és Y Hausdorff terek, $f \in C_c(X \times Y)$. Lássuk be, hogy f mérhető a $\sigma(\{U \times V : U \subseteq X, V \subseteq Y \text{ nyíltak}\})$ σ-algebra szerint.

45. Ha G topologikus csoport, akkor G kompakt $\Leftrightarrow$ létezik μ Haar-mérték, amire $\mu(G) < \infty$.

46. Legyen a G lokálisan kompakt téren μ és ν bal- és jobb Haar-mérték, és $k : G \to (0, \infty)$ az az előadáson definiált folytonos függvény, amire tetszőleges $f \in C_c(G)$ esetén $\int_G f \, \mathrm{d}\mu = \int_G k \cdot f \, \mathrm{d}\nu$. Lássuk be, hogy ha $B \subseteq G$ Borel, akkor $\mu(B) = \int_B k \, \mathrm{d}\nu$.

47. Legyen G lokálisan kompakt topologikus csoport, ami folytonosan (azaz $(g, x) \mapsto g.x$ folytonos) és tranzitívan hat az X topologikus téren.
a) Definiáljunk ennek segítségével X-en G-invariáns mértéket (ami nem triviális).
b) Rakjunk természetes mértéket a Grassmann-sokaságra, ami $G_{n,m} = \{H \leq \mathbb{R}^n : \dim H = m\}$, ahol $H \leq \mathbb{R}^n$ azt jelenti, hogy H altér $\mathbb{R}^n$-ben.

48. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ Lipschitz leképezés. Bizonyítsuk be, hogy f kiterjeszthető a teljes $\mathbb{R}^p$-re Lipschitz leképezésként (megengedve rosszabb Lipschitz konstanst is).

A feladatsorok elérhetőek a `https://keletita.web.elte.hu` oldalon.