Válogatott fejezetek az analízisből 6. gyakorlat (2020. október 19.) és néhány feladat a 7. gyakorlatra (nov. 2.)

Hétfő (okt. 19.) 10:00-ig írjátok meg, mely feladatokat tudtátok megcsinálni az október 19.-re szánt 34.-38. feladatok közül, és október 21. szerda 16:00-ig azt, hogy melyeket a szünet és Schweitzer utánra szánt 39.-40. feladatok közül!

34. Jelölje $\mathbb{R}_d$ a valós számok halmazát a diszkrét topológiával, $\mathbb{R}$ pedig ugyanezt a halmazt a szokásos (euklideszi) topológiával. Gondoljuk meg, hogy $\mathbb{R}_d$ (és emiatt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ is) lokálisan kompakt topologikus csoport, a (koordinátánkénti) összeadásra. Határozzuk meg (konstansszorzótól eltekintve) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ (bal) Haar-mértékét!

35. Lássuk be, hogy ha G topologikus csoport, $K_1, K_2 \subseteq G$ diszjunkt kompakt halmazok, akkor van olyan $U \subseteq G$ egységkörnyezet, amire $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$.

36. Lássuk be, hogy az előadáson megkonstruált μ_0 halmazfüggvény monoton.

37. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff tér.

(a) Ha $C \subseteq X$ kompakt, akkor van olyan $U \supseteq C$ nyílt, amire $\overline{U}$ kompakt.

(b) Ha $C \subseteq X$ kompakt, $U \supseteq C$ nyílt, akkor van olyan $f : X \to [0,1]$ kompakt tartójú folytonos, hogy $f|_C \equiv 1$ és $f|_{U^c} \equiv 0$.

(c) Legyen μ és ν két Borel-mérték X-en. Tegyük fel, hogy mindkettejükre igaz, hogy Borel halmazok közelíthetőek kívülről nyíltakkal, és minden nyílt közelíthető belülről kompaktakkal. Ekkor, ha minden $f \in C_c(X)$-re $\int f\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\nu$, akkor $\mu = \nu$.

38. Legyen $G = \{ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ a kompozícióra. Határozzuk meg a jobb- és bal oldali Haar-mértéket.

39. Mutassuk meg, hogy létezik általánosított limesz, azaz LIM : {korlátos valós sorozatok} $\to \mathbb{R}$ leképezés, ami lineáris és $\liminf a_n \leq \mathrm{LIM}(a_n) \leq \limsup a_n$.

40. Lássuk be, hogy ha μ bal Haar mérték a G lokálisan kompakt topologikus csoporton, $f \in C_c(G)$ és $y \in G$, akkor $\int_G f(yx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

További előzetes a 7. gyakorlatra szánt feladatok közül azok számára, akik az őszi szünetben mással akarnak foglalkozni:

41. Határozzuk meg $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ Haar-mértékét, ha a két regularitási axióma helyett azt követeljük meg a Haar-mértéktől, hogy minden Borel halmaz belülről kompaktakkal közelíthető legyen.

42. Van eltolásinvariáns általánosított limesz, azaz $\mathrm{LIM} : \{\text{korlátos valós sorozatok}\} \to \mathbb{R}$, ami lineáris, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{LIM}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ és $\mathrm{LIM}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathrm{LIM}((a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ tetszőleges $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ korlátos sorozat esetén.

A feladatsorok elérhetőek a `https://keletita.web.elte.hu` oldalon.