Válogatott fejezetek az analízisből 4. gyakorlat, 2020. október 5.

Hétfő 10:00-ig írjátok meg, mely feladatokat tudtátok megcsinálni!

21. Használva a 17. és 18. feladat eredményét (de nem használva a 16. feladatét) lássuk be, hogy $0 < \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) < \infty$, ahol C a triadikus Cantor-halmaz.

22. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ nulla Hausdorff-dimenziós nem megszámlálható halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $A \times [0, 1]$ halmaz

a) Hausdorff dimenziója 1 és

b) $\mathcal{H}^1$ szerint nem σ-véges.

23. Legyenek A_1, A_2 és A_3 egy szabályos halmaz csúcsai, $0 < r < 1/2$, f_i az A_i középpontú r arányú kicsinyítés, K pedig az (f_1, f_2, f_3) IFS által meghatározott önhasonló halmaz, és legyen s a hasonlósági dimenziója.

Bizonyítsuk be, hogy alkalmas r választása esetén a K halmaznak megváltozna az s-dimenziós Hausdorff-mértéke, ha a definícióban csak körlapokkal fedést engednénk.

24. Tegyük fel, hogy μ egy Borel-mérték, amire $\mu(K) > 0$, valamint minden $0 < r < r_0$-ra és $x \in K$-ra $\mu(B(x, r)) \leq c \cdot r^s$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathcal{H}^s(K) > 0$.

25. Legyen X egy metrikus tér. Lássuk be, hogy X szeparábilis $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}(X)$ szeparábilis.

26. Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $f_1, \ldots, f_n$ pedig kontrakciók (azaz minden $i \leq n$ esetén van olyan $q_i < 1$, hogy $d(f_i(x), f_i(y)) \leq q_i \cdot d(x, y)$ minden x, y-ra). Lássuk be, hogy ekkor pontosan egy olyan nem-üres kompakt $K \subseteq X$ létezik, melyre $K = \bigcup_{i \leq n} f_i(K)$.

27. Lássuk be, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, akkor

$$\dim_H H \leq \underline{\dim}_B H \leq \overline{\dim}_B H \leq d.$$

A feladatsorok elérhetőek a `https://keletita.web.elte.hu` oldalon.