**Válogatott fejezetek az analízisből 10. gyakorlat (nov. 23.)**

*Hétfő 10:00-ig írjátok meg, mely feladatokat tudtátok megcsinálni.*

**53.** Legyen $G$ $\sigma$-kompakt LCA csoport és $f, g : G \to \mathbb{C}$ a Haar-mérték szerint $L^1$-beli függvények. Igazoljuk, hogy $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

**54.** Legyen $(G_i)_{i\in I}$ kompakt Abel-csoportok egy családja. Lássuk be, hogy

$$\widehat{\prod_{i\in I} G_i} = \bigoplus_{i\in I} \widehat{G}_i,$$

ahol csoportok tetszőleges $(H_i)_{i\in I}$ rendszerére

$$\bigoplus_{i\in I} H_i = \left\{ h \in \prod_{i\in I} H_i : \{i \in I : h(i) \neq 1_{H_i}\} \text{ véges} \right\}$$

a diszkrét topológiával.

**55.** Lássuk be, hogy $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$, mint topologikus csoportok.

**56.** Legyen $G$ lokálisan kompakt csoport, $\mu$ a bal Haar-mértéke. Jelölje $\mathcal{U}$ az $L^2(\mu)$ Hilbert-tér unitér transzformációinak csoportját a pontonkénti konvergencia topológiájával (azaz az $\{U \in \mathcal{U} : \|U(f) - g\|_2 < \varepsilon\}$ alakú halmazok, $f, g \in L^2(\mu)$, $\varepsilon > 0$ esetén egy elő-bázisát alkotják a topológiának). Rendeljük egy $g \in G$ csoportelemhez azt az $U_g \in \mathcal{U}$ unitér transzformációt, melyre $(U_g(f))(x) = f(g^{-1}x)$. Lássuk be, hogy a $g \mapsto U_g$ leképezés jól definiált (azaz $U_g$ valóban egy $L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ unitér transzformáció), injektív, és egy csoport homomorfizmus. Abban a speciális esetben, ha $G$ kompakt, gondoljuk meg azt is, hogy homeomorfizmus.

**57.** Mutassunk ellenpéldát az alábbi állításra:
Ha $X$ és $Y$ Banach-terek, $H \subset X$, $f : H \to Y$ Lipschitz leképezés, akkor $f$ kiterjeszthető $X$-re Lipschitz leképezésként ugyanolyan Lipschitz konstanssal.

A feladatsorok elérhetőek a `https://keletita.web.elte.hu` oldalon.