Az analízis megalapozása javító zh megoldásai

1. feladat: Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Keressük meg az a-d állításokkal ekvivalenseket az A-E állítások között!

(a) $(\forall x \in H)\ (\forall y \in H)\ x < y$ (b) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ x < y$
(c) $(\exists x \in H)\ (\forall y \in H)\ x < y$ (d) $(\exists x \in H)\ (\exists y \in H)\ x < y$

(A) H üres, (B) H-nak legalább két különböző eleme van,
(C) H-nak nincs maximuma, (D) H alulról korlátos, (E) $H \neq H$

(1 találat: 0.1 pont, 2 találat: 0,4 pont, 3 találat: 0,7 pont, 4 találat: 1 pont)

Válasz: (a)-(A), (b)-(C), (c)-(E), (d)-(B)

Megjegyzés: A (c) állítás semmilyen H halmaz esetén sem igaz (még az üres halmazra sem), hiszen saját magával minden szám egyenlő, így semmilyen halmaznak sem lehet olyan eleme, amelynél a halmaz minden eleme nagyobb. Mivel az (E) állítás sem igaz semmilyen halmazra, ezért ekvivalens a (c)-vel, hiszen pontosan akkor igaz (E), mint (c): soha.

2. feladat:

(a) Négy kártya fekszik az asztalon. Tudjuk, hogy az egyik oldalukon betű, a másik oldalukon szám van. Béla azt állítja, hogy minden magánhangzó hátulján páros szám van. Az egyiken A, a másikon K, a harmadikon 5, a negyediken 8 látszik. Melyik kártyát vagy kártyákat kell feltétlenül megfordítanunk ahhoz, hogy biztosan eldönthessük, igaza van-e Bélának?

(b) Legyen A valós számokból álló halmaz. Írjuk fel az „A felülről korlátos” állítás tagadását (akár logikai jelekkel, akár szöveggel, de természetesen a tagadás jel, „nem”, „hamis” és hasonló szavak nélkül)!

Megoldás:

(a) Megmutatjuk, hogy az A-t és az 5-t meg kell fordítanunk, a többit nem.

Béla állításának az a tagadása, hogy van olyan kártya, melynek az egyik oldalán magánhangzó, a másik oldalán páratlan szám van. Tehát azt kell eldöntenünk, hogy van-e ilyen kártya. Az A és az 5 lehet ilyen, ezért azokat meg kell fordítani, a K és a 8 viszont semmiképpen sem lehet ilyen, tehát azokat nem kell megfordítani.

(b) A felülről korlátossága definíció szerint azt jelenti, hogy van olyan valós szám, amely legalább akkora mint az A halmaz bármely eleme. Így ennek tagasása az, hogy minden valós számnál van nagyobb eleme az A halmaznak.

Ugyanez jelekkel: A felülről korlátos definíció szerint, ha $(\exists K \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ x \leq K$. Ennek tagadása: $(\forall K \in \mathbb{R})\ (\exists x \in A)\ x > K$.

3. feladat: Megadható-e három pozitív valós szám úgy, hogy az összegük 5, a szorzatuk pedig 8 legyen?

Megoldás: Nem. Indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a, b, c pozitív valós számok, melyekre $a + b + c = 5, abc = 8$. Ekkor az a, b, c számok számtani közepe $A = (a + b + c)/3 = 5/3$, mértani közepe pedig $G = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{8} = 2$. Ez ellentmond a számtani-mértani középről szóló tételnek, amely azt mondja ki, hogy pozitív számok számtani közepe mindig legalább akkora mint a mértani közepük.

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$!

Megoldás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ eset világos, hiszen $|a_1| \leq |a_1|$. Most feltesszük, hogy az állítás igaz n-re, és ebből belátjuk, hogy igaz $n + 1$-re is. Használva először az $|x + y| \leq |x| + |y|$ háromszög egyenlőtlenséget az $x = a_1 + \ldots + a_n$, $y = a_{n+1}$ esetre, aztán az indukciós feltevést, épp a bizonyítandó állítást kapjuk $n + 1$-re:

$$|a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1 + \ldots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}|.$$

5. feladat: Legyen $H_n = \left[-\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right]$, $G_n = \left(-\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right)$. Határozzuk meg a $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ halmazokat!

Megoldás: Bebizonyítjuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = [0,1]$.

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy (1) egyrészt $[0,1]$ része mindkét metszetnek, vagyis része minden szereplő halmaznak, (2) másrészt $[0,1]$-n kívül semmilyen x szám sincs benne sem az egyik, sem a másik metszetben, amihez az kell, hogy van olyan n, amelyre $x \notin H_n$, és olyan amelyre $x \notin G_n$.

Az (1) állítás világos, hiszen $[0,1] \subset \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \subset \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ minden n-re.

A (2) bizonyításához vegyünk egy $[0,1]$-n kívüli x számot. Ekkor $x < 0$ vagy $x > 1$. Ha $x < 0$, akkor n-et $1/(-x)$-nél nagyobbra választva (Arkhimédeszi axióma) $1/n < -x$, így $x < -1/n$, tehát erre az n-re $x \notin \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = H_n$ és $x \notin \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = G_n$. Ha $x > 1$, akkor n-et $1/(x-1)$-nél nagyobbra választva $1/n < x-1$, így $x > 1 + (1/n)$, tehát erre az n-re $x \notin \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = H_n$ és $x \notin \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = G_n$.

6. feladat: Tegyük fel, hogy A és B korlátos, nemüres részhalmazai $\mathbb{R}$-nek. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!

(i) $A \subset B$ (ii) $\sup A \leq \sup B$ és $\inf A \geq \inf B$

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy (i)$\Longrightarrow$(ii), de (ii)$\not\Longrightarrow$(i).

(i)$\Longrightarrow$(ii): Tegyük fel, hogy A és B korlátos, nemüres részhalmazai $\mathbb{R}$-nek és $A \subset B$. Meg kell mutatnunk, hogy $\sup A \leq \sup B$ és $\inf A \geq \inf B$. Mivel A és B korlátos, nemüres halmazok, ezért $\inf A, \sup A, \sup B$ és $\inf B$ léteznek és valós számok. Mivel $\sup B$ felső korlátja B-nek, és A részhalmaza B-nek, ezért $\sup B$ felső korlátja A-nek is (hiszen A minden eleme egyben B-nek is eleme). Mivel $\sup A$ a legkisebb felső korlát, ezért ez csak úgy lehet, hogy $\sup A \leq \sup B$. Hasonlóan megy a másik egyenlőtenség is: $\inf B$ alsó korlátja B-nek, és A részhalmaza B-nek, ezért $\inf B$ alsó korlátja A-nek is, de $\inf A$ a legkisebb alsó korlát, így $\inf A \geq \inf B$.

(ii)$\not\Longrightarrow$(i) Rengeteg ellenpélda van. Legyen például $A = \{2,3\}, B = \{1,4\}$. Ekkor $\sup A = 3 \leq 4 = \sup B$ és $\inf A = 2 \geq 1 = \inf B$, de B nem tartalmazza A-t.

7. feladat: Legyen A valós számokból álló halmaz.

(a) Igaz-e, hogy ha $\sup A$ racionális, akkor A tartalmaz racionális számot?

(b) Igaz-e, hogy ha $\sup A$ irracionális, akkor A tartalmaz irracionális számot?

Megoldás:

Bebizonyítjuk, hogy egyik sem igaz, mindkettőhöz mutatunk ellenpéldát.

(a) Legyen A a negatív irracionális számok halmaza. Ekkor $\sup A = 0$, mert 0 felső korlátja A-nak, de semmilyen $b < 0$ szám nem lehet felső korlát, hiszen tanultuk, hogy tetszőleges két valós szám között van irracionális szám, így b és 0 között is. Tehát $\sup A$ racionális, de A nem tartalmaz racionális számot.

(b) Legyen $A = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$. Ekkor $\sup A = \sqrt{2}$, mert $\sqrt{2}$ felső korlátja A-nak, de semmilyen $b < \sqrt{2}$ szám nem lehet felső korlát, hiszen tanultuk, hogy tetszőleges két valós szám között van racionális szám, így b és $\sqrt{2}$ között is. Tehát $\sup A = \sqrt{2}$ irracionális, de A nem tartalmaz irracionális számot.