9. Analízis4 gyakorlat, 2023. ápr. 25., 2-es csoport

9.1. Legyen

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \in A \\ 0 & \text{ha } 0 \notin A. \end{cases}$$

a) Mi δ λ szerinti Lebesgue felbontása?
b) Mi λ δ szerinti Lebesgue felbontása?

9.2. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy rögzített σ-véges mértéktér.
a) Mely mérhető $f : X \to [0, \infty]$ függvényekre igaz, hogy $\mu \ll \int f \, d\mu$?
b) Határozzuk meg a Radon-Nikodym deriváltat!

9.3. Egy mértéktér atomos, ha van benne olyan pozitív mértékű halmaz, melynek nincs kisebb pozitív mértékű része. Legyen μ Borel mérték $\mathbb{R}$-en.
a) Mi az összefüggés az alábbi állítások között?
(i)

$$\mu \ll \lambda$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) = 0$
(iii) μ atommentes
b) Mi változik, ha μ végességét is kikötjük?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

9.4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrálható $\mathbb{R}$-en, $\vartheta(H) = \int_H f \, d\mu$ ($H \subset R$ Lebesgue mérhető), és $\vartheta_r(H) = \vartheta(H + r)$ ($r \in \mathbb{R}$).
a) Melyik igaz biztosan: $\vartheta_r \ll \lambda$, $\vartheta \perp \vartheta_r$, $\vartheta \ll \vartheta_r$, $\vartheta_r \ll \vartheta$?
b) Határozzuk meg a $\frac{d\vartheta_r}{d\lambda}$ Radon-Nikodym deriváltat!

9.5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges mértéktéren ha egy komplex értékű mérhető függvény integrálja minden mérhető halmazon 0, akkor a függvény majdnem mindenütt 0.

9.6. Tegyük fel, hogy μ véges Borel-mérték $\mathbb{R}^p$-n, $U \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f(t) = \mu(U + t)$, ahol $U + t$ az U halmaz eltoltja a t vektorral. Következik-e ebből, hogy f folytonos / alulról félig folytonos / felülről félig folytonos ?

9.7. Legyen $f : X \to \mathbb{C}$ integrálható.
a) Milyen reláció igaz mindig?

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \; < \; \leq \; = \; \geq \; > \; \int_X |f| \, d\mu$$

b) Mely f függvényekre áll fenn egyenlőség?