8. Analízis4 gyakorlat, 2023. ápr. 18., 2-es csoport

8.1. Legyen $\mu = \lambda - \mu_{[x]}$ a $[0, 100]$ halmazon. Mik a mérhető halmazok? Mik a mérték variációi? Mi a mérték Jordan-felbontása, és mi a Hahn-felbontása?

8.2. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Melyikből következik melyik?
(i) f m.m. $x \in [a, b]$ -ben folytonos.
(ii) Van olyan folytonos függvény, amellyel f m.m. x-ben megegyezik.
(iii) Van olyan null-mértékű H halmaz, hogy $[a, b] \setminus H$-ra megszorítva f folytonos.
(iv) f Riemann integrálható $[a, b]$-n.

8.3. Igaz-e, hogy ha f integrálható egy mérhető X halmazon, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadható $\delta > 0$ úgy, hogy valahányszor $A \subset X$, A mérhető és $\mu(A) < \delta$, akkor $\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

8.4. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvények és minden x-re $f_n(x) \to 0$, akkor $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0$.

8.5. A $[0, 4\pi]$ intervallum Lebesgue mérhető halmazaira legyen

$$\vartheta(A) = \int_A \sin t \; d\lambda.$$

Határozd meg a ϑ előlejes mérték Jordan- és Hahn-felbontását.

8.6. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor a $g(x) = \Phi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ függvény is Riemann-integrálható $[a, b]$-n.

8.7. Tegyük fel, hogy $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények sorozata, mely minden pontban monoton növő és korlátos. Igaz-e, hogy $\lim f_n$ mindig folytonos / alulról félig folytonos / felülről félig folytonos ?

Beadható szorgalmi feladatok

8.8. Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue mérhető függvény additív (azaz $f(a + b) = f(a) + f(b)$ minden $a, b \in \mathbb{R}$-re), akkor f lineáris (azaz $f(x) = c \cdot x$ alakú)?

8.9. Adjunk bizonyítást a 8.4. feladatra Lebesgue-integrál és mértékelmélet nélkül.

8.10. Legyen $\mathcal{V}$ az olyan folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények vektortere, amelyeknek létezik véges határértéke a ∞-ben. Létezik-e olyan μ előjeles Borel-mérték $\mathbb{R}$-en, amelyre tetszőleges $f \in \mathcal{V}$-re $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \; d\mu = \lim_{\infty} f$?

(Az előjeles mérték szerinti integrál a variációk szerinti integrálok különbsége: $\int f \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\pi - \int f \, \mathrm{d}\nu$.)