# 7. Analízis4 gyakorlat, 2023. ápr. 11., 2-es csoport

Minden feladatban, ahol $\mu$ szerepel, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér.

**7.1.** Adott $A_1, A_2, \ldots$ mérhető halmazokra legyen $f(x)$ azon $A_i$ halmazok száma, amelyek tartalmazzák $x$-et. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f$ mérhető és

$$\int_X f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**7.2.** Igaz-e, hogy ha az $f$ mérhető függvény mindenütt pozitív egy pozitív mértékű $A$ halmazon, akkor $\int_A f d\mu > 0$ ?

**7.3.** Létezik-e, ha igen mennyi?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \; dx$$

**7.4.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \; d\mu < \infty$, akkor

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \; d\mu \; !$$

Melyik oldal létezését kell feltenni és melyik következik a feltételekből?

**7.5.** Igaz-e, hogy ha az $f_n$ mérhető függvény nemnegatív a mérhető $A$-n és $\int_A f_n \; d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to 0$ $\mu$-majdnem mindenütt $A$-n?

**7.6.** Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mérhető függvény, amelynek minden intervallumon $+\infty$ az integrálja?

## Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

**7.7.** Bizonyítsuk be a Fatou lemmából a Lebesgue féle monoton konvergencia tételt! (Vajon előadáson miért volt ennél jóval bonyolultabb a bizonyítás?)

**7.8.** Mutass példát olyan, pontonként konvergens $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatra, amire $\lim \int_0^1 f_n$ létezik, de $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$.