6. Analízis4 gyakorlat, 2023. ápr. 4., 2-es csoport

6.1. Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, $H \subset X$. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között?
(i) $H \in \mathcal{M}$.
(ii) A χ_H karakterisztikus függvény mérhető X-en.

6.2. Igaz-e, hogy egy Lebesgue-mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt nullmértékű halmazon megváltoztatva Lebesgue-mérhető függvényt kapunk?

6.3. Bizonyítsuk be, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényhez létezik $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} \ : \nexists \lim_{n\to\infty} g_n(x) \text{ vagy } f(x) \neq \lim_{n\to\infty} g_n(x)\}) = 0.$$

6.4. Jellemezzük azokat az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyeket úgy kaphatunk, hogy egy Borel-mérhető függvényt (Lebesgue) nullmértékű halmazon megváltoztatunk!

Beadható szorgalmi feladatok

6.5. Igaz-e, hogy minden Riemann-integrálható függvény Borel-mérhető?

6.6. (Jegorov tétel) Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, melyre $\mu(X) < \infty$. Tegyük fel, hogy az $f_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvények pontonként tartanak f-hez. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $D \in \mathcal{M}$, melyre f_n egyenletesen tart f-hez $X \setminus D$-n.