5. Analízis4 gyakorlat, 2023. márc. 28., 2-es csoport

5.1. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg a $\overline{\mu}_f$ Lebesgue-Stieltjes külső mértéket és a mérhető halmazok rendszerét.

5.2. Legyenek μ és ν lokálisan véges mértékek $\mathbb{R}^n$ Borel részhalmazain. Igaz-e, hogy ha $\mu(K) = \nu(K)$ minden K kompakt halmazra, akkor $\mu = \nu$?

5.3. Mely $H \subset [0,1]^n$ halmazokra igaz, hogy

$$\overline{\lambda}(H) = \sup\{\lambda(A) : A \subset H,\ A \text{ mérhető}\}?$$

5.4. Legyen μ véges, nem azonosan nulla Borel mérték egy teljes, szeparábilis X metrikus téren.

a) Bizonyítsuk be, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható véges sok zárt gömb $B_1, \ldots, B_n$ úgy, hogy $\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_n) > \mu(X) - \varepsilon$.

b) Mutassuk meg, hogy van olyan $K \subset X$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(K) > 0$.

c) Lássuk be, hogy $\mu(X) = \sup\{\lambda(K) : K \subset X,\ K \text{ kompakt}\}$.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

5.5. Legyen $g(x) = \lfloor x \rfloor$ és $h(x) = \lceil x \rceil$. Határozzuk meg a $\overline{\mu}_g$, $\overline{\mu}_h$ Lebesgue-Stieltjes külső mértékeket és a mérhető halmazok rendszerét.

5.6. Mely $H \subset [0,1]^n$ halmazokra igaz, hogy

a) $\overline{\lambda}(H) = \max\{\lambda(A) : A \subset H,\ A \text{ mérhető}\}$?

b) $\sup\{\lambda(A) : A \subset H,\ A \text{ mérhető}\} = \max\{\lambda(A) : A \subset H,\ A \text{ mérhető}\}$?

c) Melyik válaszon változtat, ha $H \subset [0,1]^n$ helyett $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazokat tekintünk?

Fakultatív feladatok az érdeklődőbbeknek

5.7. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két (megoldatlan) sejtés ekvivalens:

- Mértékelméleti változat: Van olyan $c > 0$ konstans, amelyre bármely Lebesgue-mérhető $H \subset [0,1]^2$ halmazból kiválasztható 4 pont, melyek egy legalább $c(\lambda(H))^2$ területű tengelypárhuzamos téglalapot alkotnak.

- Kombinatorika változat: Van olyan $c > 0$ konstans, amelyre bármely pozitív egész n-re és k-ra az $n \times n$-es sakktábla akármelyik k mezőjéből kiválasztható négy, melyek egy legalább ck^2/n^2 mezőt tartalmazó téglalap négy sarkát alkotják.

5.8. Legyen f a Cantor-függvény, és μ_f az f által generált Lebesgue-Stieltjes mérték. Bizonyítsuk be, hogy μ_f önhasonló mérték, azaz léteznek olyan $g_1, \ldots, g_n$ hasonlóságok, melyekre tetszőleges mérhető H halmaz esetén

$$\mu_f(H) = \mu_f(g_1^{-1}(H)) + \ldots + \mu_f(g_n^{-1}(H)).$$

5.9. a) (Ha még nem volt.) Bizonyítsuk be, hogy minden nem megszámlálható $F \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz tartalmaz nem üres perfekt halmazt, azaz olyan zárt halmazt, melynek nincs izolált pontja.

b) (Szintén ha még nem volt.) Bizonyítsuk be, hogy a számegyenes tetszőleges perfekt részhalmaza kontinuum számosságú!

c) Konstruáljunk (transzfinit indukcióval) olyan diszjunkt $A, B \subset [0,1]$ halmazokat, melyek $[0,1]$ minden pozitív mértékű mérhető részhalmazát metszik.

d) Adjunk meg két diszjunkt 1 külső mértékű halmazt $[0,1]$-ben.

Beadható szorgalmi feladatok

5.10. Igaz-e, hogy Lebesgue-mérhető halmaz folytonos képe mindig Lebesgue-mérhető?

5.11. Hány páronként diszjunkt 1 külső mértékű halmazt lehet megadni $[0, 1]$-ben?