4. Analízis4 gyakorlat, 2023. márc. 21., 2-es csoport

4.1. Miért nem külső mérték a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?

4.2. Legyen $\mathcal{T}$ az $[a,b) \times [c,d)$ alakú, félig nyílt téglalapok rendszere.
(a) Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű.
(b) Mi a $\mathcal{T}$ által generált gyűrű?
(c) Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor additív, ha létezik olyan $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amire $f\big([a,b) \times [c,d)\big) = g(b,d) - g(a,d) - g(b,c) + g(a,b)$.
(d) Mit jelentsen az, hogy egy $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény *„korlátos változású”*?

4.3. Adjuk meg $P(\mathbb{R}) = \{A : A \subset \mathbb{R}\}$-en az összes 0-1 értékű mértékét!

4.4. Mennyi azon $x \in \mathbb{R}$ számok halmazának mértéke, melyekhez végtelen sok olyan p/q racionális szám van $(p, q \in \mathbb{Z})$, amelyre $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^3}$?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

4.5. Igazoljuk, hogy $F_{\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n) \subset G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n)$.

4.6. Igaz-e, hogy ha az $A, B \subset \mathbb{R}^d$ halmazok távolsága pozitív, akkor
$\overline{\lambda}(A \cup B) = \overline{\lambda}(A) + \overline{\lambda}(B)$?

4.7. Igaz-e, hogy ha $A_n \subset [0,1]$ Lebesgue mérhető és $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \infty$, akkor van olyan pont, amely végtelen sok A_n-nek eleme?

Beadható szorgalmi feladat

4.8. A μ mértéket az $\mathcal{M}$ σ-algebrán atommentesnek mondjuk, ha bármely pozitív mértékű $A \in \mathcal{M}$-nak van olyan $B \in \mathcal{M}$ részhalmaza, amelyre $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Bizonyítsuk be, hogy egy ilyen mérték értékkészlete csak intervallum lehet!