3. Analízis4 gyakorlat, 2023. márc. 14., 2-es csoport

3.1. Igaz-e, hogy gyűrűn egy előjeles mérték nem vehet föl $+\infty$-t is és $-\infty$-t is?

3.2. Igaz-e, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^d$ diszjunkt mérhető halmazok, $X \subset A$ és $Y \subset B$, akkor $\overline{\lambda}(X \cup Y) = \overline{\lambda}(X) + \overline{\lambda}(Y)$?

3.3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{x = 0, a_1 a_2 \ldots : \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{10}\right\}$$

Borel halmaz. Próbáljuk meg minél szűkebb Borel osztályra (nyílt, zárt, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$,...) bizonyítani, hogy benne van!

3.4. Mennyi lehet a Lebesgue mértéke $\mathbb{R}$ egy
a) sűrű nyílt b) sehol sem sűrű zárt
részhalmazának?

3.5. (Borel-Cantelli lemma) Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tetszőleges mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, akkor azon pontok halmaza, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei, nullmértékű.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

3.6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^p$-ben minden nyílt halmaz F_σ és minden zárt halmaz G_δ.

3.7. Legyen $\mathcal{A}$ gyűrű és $A_1, \ldots, A_{100} \in \mathcal{A}$. Igaz-e, hogy azon pontok halmaza, amelyek az A_i-k közül pontosan 17-ben vannak benne, $\mathcal{A}$-ban van?

3.8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^d$-re:

$$\overline{\lambda}(H) = \inf\{\lambda(A) : H \subset A,\ A \text{ mérhető}\} = \min\{\lambda(A) : H \subset A,\ A \text{ mérhető}\}.$$

3.9. Legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos minden n-re.
a) Bizonyítsuk be, hogy $\{x : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ konvergens}\}$ Borel halmaz!
b) Igaz-e, hogy $G_{\delta\sigma}$ vagy $F_{\sigma\delta}$? (Ez egy kérdés.)

Beadható szorgalmi feladat

3.10. Van-e megszámlálhatóan végtelen σ-algebra?