2. Analízis4 gyakorlat, 2023. márc. 7., 2-es csoport

2.1. Rögzített $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ mellett legyen (a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$; (b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{div} f = ? \qquad \operatorname{rot} f = ?$$

2.2. Számítsuk ki az $\int_\gamma (f \times \mathbf{n} \mathrm{d}s)$, és az $\int_\gamma \langle f, \mathbf{n} \mathrm{d}s \rangle$ vonalintegrálok értékét, ha γ az egységkör, és $f(x, y) = (x^2 + y, x + y^3)$.

2.3. Legyen $u(x, y, z) = \frac{1}{|(x,y,z)|}$, és legyen $f = \operatorname{grad} u$.

(a) Határozzuk meg az $\int_{x^2+y^2+z^2=R^2} \langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}A} \rangle$ felületi integrált!

(b) Mennyi $\operatorname{div} f$?

(c) Miért nem mond ez ellent a Gauss-Osztrogradszkij tételnek? Mire lehet itt használni a G-O tételt?

2.4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ akárhányszor differenciálható vektormező.

(a) Bizonyítsd be, hogy f akkor és csak akkor rotációmentes, ha van olyan $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, amire $f = \operatorname{grad} h$.

(b) Bizonyítsd be, hogy f akkor és csak akkor divergenciamentes, ha van olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, amire $f = \operatorname{rot} g$.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

2.5. Számítsuk ki az $\int_\gamma (f \times \mathbf{n} \mathrm{d}s)$, és az $\int_\gamma \langle f, \mathbf{n} \mathrm{d}s \rangle$ vonalintegrálok értékét, ha γ az egységkör, és $f(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$.

2.6. Állapítsuk meg, hogy a $\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \operatorname{grad}$ operátorok lehetséges 9 párosításából $(\operatorname{div} \operatorname{div}, \operatorname{div} \operatorname{rot}, \dots)$ melyek alkalmazhatóak kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényre, illetve $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezésre, és közülük melyek adnak mindig nullát!

2.7. Legyen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

$$\int_\gamma \mathbf{n} \mathrm{d}s = ?$$

Beadható szorgalmi feladat

2.8. Legyen $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sima függvény, mely egy korlátos halmazon kívül 0.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|(x, y, z)|} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) \mathrm{d}V$$

integrál értéke csak $\Phi(0)$-tól függ!

(b) Mennyi ez az érték?

2.9. 1. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és $F : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, divergenciamentes vektormező. Igazoljuk, hogy F felületi integrálja nulla minden G-beli nullhomotóp irányított, zárt poliéderfelületen.

2. Adjunk meg az $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ halmazon olyan divergenciamentes mezőt és olyan zárt poliéderfelületet, amin a felületi integrál nem nulla.

3. Bizonyítsuk be, hogy $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-bel.