10. Analízis4 gyakorlat, 2023. május 2., 2-es csoport

10.1. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmaz. Jellemezzük H karakterisztikus függvényének Lebesgue pontjait a sűrűségi pont fogalmának segítségével.

10.2. Steinhaus tétele:
a) Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(H) > 0$, akkor $H - H$ tartalmaz 0 körüli gömböt.
b) Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A + B$ belseje nem-üres.

10.3. Adott $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$-hez mutassunk olyan mérhető $H \subset \mathbb{R}$-t, melyre $\overline{D}(0, H) = \beta$ és $\underline{D}(0, H) = \alpha$!

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

10.4. Határozzuk meg a Cantor halmaz karakterisztikus függvényének Lebesgue pontjait!

10.5. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható, $\vartheta = \int f \mathrm{d}\lambda$. Milyen egyenlőtlenségek állnak fenn f, Mf, $M\vartheta$ és $D\vartheta$ között
a) minden pontban?
b) majdnem minden pontban?
c) f folytonossági pontjaiban?
d) f Lebesgue-pontjaiban?

10.6. a) Bizonyítsd be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor tartalmazza alkalmas szabályos 2023-szög csúcsait.
b) Általánosítsd az (a) rész állítását minél jobban!

Beadható szorgalmi feladatok

10.7. A Steinhaus-tétel b) résznél A és B közül hánynak kell mérhetőnek lennie?

10.8. Melyek azok a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazok, amelyeknek minden pontjában a sűrűség létezik és az értéke 0 vagy 1?