8. Analízis3 gyakorlat, 2022. okt. 6. 2-es csoport

8.1. Tekintsük az $f(z) = z^3$ komplex függvényt mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezést.
a) Írjuk fel f Jacobi mátrixát!
b) Mi a derivált $z_0 = x_0 + iy_0$-ban?
c) Mi ez a transzformáció komplex műveletekkel kifejezve?

8.2. Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ függvény, differenciálható. Mi a Jacobi-mátrixa az $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ pontban?

8.3. Igazoljuk, hogy minden $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$-re $\|A\| \geq |\det A|^{1/p}$.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

8.4. Írd fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x,y) = \big(\sin x, \cos y\big); \quad g(x,y) = \big(\log x, x^2 + y^2\big); \quad h = f \circ g.$$

8.5. Mi a $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ függvény deriváltja?

8.6. Van-e olyan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek az origóban minden iránymenti deriváltja 0, de a függvény nem korlátos az origó egyetlen környezetében sem?