

7. Analízis3 gyakorlat, 2022. okt. 3., 2-es csoport

7.1. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. A Lagrange-közéértéktételből vezessük le, hogy ha minden $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontban

$$\langle f'(x, y, z), (x, y, z) \rangle \geq 0,$$

akkor f -nek abszolút minimuma van az origóban.

7.2. Igazold, hogy az $(x, y) \mapsto x^y$ függvény ($x > 0$) differenciálható. Mi a deriváltja?

7.3. Igaz-e, hogy egy folytonos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális minimumhelye az origó, ha minden origón átmenő egyenesre szorítkozva lokális minimumhelye?

7.4. Jellemezzük azon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket, melyekre $D_1 f = D_2 f$ mindenütt teljesül.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

7.5. Igazoljuk, hogy az n -dimenziós vektorok skaláris szorzása, mint $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

7.6. Legyen minden $c \in \mathbb{R}$ -re

$$f_c(x, y, z) = \begin{cases} \frac{|xyz|^c}{|x| + |y| + |z|} & \text{ha } xyz \neq 0 \\ 0 & \text{ha } xyz = 0. \end{cases}$$

- (a) Milyen c -re van f_c -nek határértéke a 0-ban?
- (b) Milyen c -re folytonos a 0-ban?
- (c) Milyen c -re differenciálható a 0-ban?

7.7. Van-e olyan $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek az origóban minden iránymenti deriváltja 0, de a függvény nem korlátos az origó egyetlen környezetében sem?

Beadható szorgalmi feladatok

7.8. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között?

- (i) f Baire-1, azaz folytonos függvények pontonkénti limesze.
- (ii) Létezik olyan $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely mindkét változójában folytonos (azaz $g(x, c)$ és $g(c, y)$ folytonosak tetszőleges rögzített c -re) és amelyre $f(x) = g(x, x)$ teljesül minden x -re.