6. Analízis3 gyakorlat, 2022. szept. 29., 2-es csoport

6.1. Jellemezzük azon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre $D_1 f$ mindenütt létezik és azonosan 0.

6.2. Határozd meg az $x^2 + y^2 - x$ függvény értékkészletét az $x^2 + y^2 \leq 1$ halmazon.

6.3. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható az a pontban, $f(a) = 0$, és $f'(a) = 0$, akkor minden korlátos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre gf is differenciálható a-ban.

(Miért nem azt írtuk a feltételben, hogy $f(a) = f'(a) = 0$?)

6.4. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x/y$ függvény differenciálható ($y \neq 0$). Mi a deriváltja?

6.5. Igaz-e, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek csak egy lokális szélsőértékhelye van, akkor az egyben globális is?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

6.6. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto xy$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

6.7. Határozzuk meg $x^3 + y^2 - xy$ minimumát és maximumát a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzeten.

6.8. Legyen $a, b > 0$. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$ függvény grafikonjának az (a, b) ponthoz tartozó érintősíkja az $\{(x, y, z) \ : \ x, y, z \geq 0\}$ térnyolcadból olyan tetraédert vág le, amelynek térfogata nem függ a-tól és b-től!