

## 5. Analízis3 gyakorlat, 2022. szept. 26., 2-es csoport

5.1. Igazoljuk, hogy az  $(x, y) \mapsto x + y$  függvény folytonos. Keressünk az  $(1, 2)$  pontban  $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz  $\delta$ -t.

5.2. Legyen  $A \subset \mathbb{R}^p$  és  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges függvény. Legyen  $B$  azon  $\mathbb{R}^p$ -beli pontok halmaza, amelyekben az  $f$ -nek létezik véges határértéke az  $A$  halmazra szorítkozva, és legyen tetszőleges  $b \in B$ -re  $g(b) = \lim_{x \rightarrow b, x \in A} f(x)$ . Igazoljuk, hogy  $g$  folytonos a  $B$  halmazon.

5.3. Legyen  $K \subset \mathbb{R}^p$ . Melyik állításból következik a másik?

- (i) Minden folytonos  $K \rightarrow \mathbb{R}$  függvény korlátos.
- (ii)  $K$  kompakt.

5.4. Tegyük fel, hogy az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény mindegyik  $f_{x=a}$  szekciófüggvénye folytonos, és mindegyik  $f_{y=b}$  szekciófüggvénye monoton és folytonos. Következik-e ebből, hogy  $f$  folytonos?

5.5. Van-e olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely pontosan az irracionális számokban folytonos?

### Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

5.6. Igazoljuk, hogy az  $(x, y) \mapsto xy$  függvény folytonos. Keressünk az  $(1, 2)$  pontban  $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz  $\delta$ -t.

5.7. (a) Létezik-e az  $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$  függvénynek határértéke az origóban az  $\{(x, y) : x \neq y\}$  halmazra szorítkozva?

(b) Kiterjeszhető-e a függvény folytonosan a teljes síkra?

5.8. Igazoljuk, hogy egy  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz  $f$  szerinti ősképe nyílt.

5.9. Igaz-e, hogy ha  $H \subset \mathbb{R}^p$  összefüggő, és  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  folytonos, akkor  $f(H)$  is összefüggő?

5.10. Milyen valós  $\alpha$  esetén folytonos az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény a  $(0, 0)$  pontban?

### Beadható szorgalmi feladatok

5.11. Van-e olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely pontosan a racionális számokban folytonos?