

4. Analízis3 gyakorlat, 2022. szept. 22., 2-es csoport

4.1. Igaz-e, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, nem diszjunkt halmazok, akkor $A \cup B$ is összefüggő?

4.2. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek:

$$(a) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{e^x - e^y}{x - y}; \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

Adjunk meg minden esetben ε -hoz δ -t.

4.3. Egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek minden origón átmenő egyenesre szorítkozva 0 a határértéke az origóban. Következik-e ebből, hogy a függvénynek van határértéke az origóban?

4.4. Igaz-e, hogy ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, akkor $\text{cl } G$ ívszerűen összefüggő?

4.5. Vannak-e olyan diszjunkt, összefüggő $A, B \subset [0, 1] \times [0, 1]$ halmazok, amelyekre a $(0, 0)$ és $(1, 1)$ pontok A -ban, a $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pedig B -ben vannak?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

4.6. Igaz-e, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ útösszefüggő, nem diszjunkt halmazok, akkor $A \cup B$ is útösszefüggő?

4.7. (Elnapoltuk.) Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek:

$$(a) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = \sin x}} \frac{y}{x}, \quad (b) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,3) \\ x \neq y}} \frac{x - 2}{y - 3};$$

Adjunk meg minden esetben ε -hoz δ -t.

Beadható szorgalmi feladatok

4.8. Bizonyítsd be, hogy minden (X, d) összefüggő, kompakt metrikus térhez létezik olyan α valós szám, hogy tetszőleges n pozitív egészhez és $a_1, \dots, a_n \in X$ pontokhoz van olyan $b \in X$, amire

$$\frac{d(a_1, b) + \dots + d(a_n, b)}{n} = \alpha.$$