3. Analízis3 gyakorlat, 2022. szept. 19., 2-es csoport

3.1. (a) Igazoljuk, hogy minden $K \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, zárt halmaznak van az origótól minimális távolságú pontja.

(b) Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, korlátos, zárt halmaz, akkor van az origótól maximális távolságú pontja.

3.2. Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ folytonos görbe. Mutassuk meg, hogy a görbe értékkészlete kompakt.

3.3. A Cantor-metszettétel segítségével igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-ben teljesül a Baire-kategóriatétel:

(a) ha $F_1, F_2 \ldots$ sehol sem sűrű halmazok (azaz $\operatorname{int} \operatorname{cl} F_n = \emptyset$), akkor $\operatorname{int} \left(\bigcup F_n\right) = \emptyset$.

(b) ha $G_1, G_2, \ldots$ sűrű nyílt halmazok (azaz $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}^p$), akkor $\bigcap G_n$ sűrű.

3.4. Legyen $K \subset \mathbb{R}^p$ olyan origóra szimmetrikus halmaz, melyet bármely origóból kiinduló félegyenes egy origóból induló, nem elfajuló zárt szakaszban metsz. Legyen

$$||x||_K = \inf\{r > 0 : x \in r \cdot K\}.$$

Mutassuk meg, hogy $||.||_K$ akkor és csak akkor norma $\mathbb{R}^p$-n, ha K konvex.

3.5. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q} \in F_\sigma(\mathbb{R}) \setminus G_\delta(\mathbb{R})$, azaz a racionális számok halmaza előáll a számegyenes megszámlálhatóan sok zárt részhalmazának uniójaként, de nem áll elő a számegyenes megszámlálhatóan sok nyílt részhalmazának metszeteként.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

3.6. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz, és $\gamma : [a, b] \to G$ folytonos görbe. Mutassuk meg, hogy van olyan $r > 0$, amelyre a görbe r-sugarú környezete is G-ben fekszik, azaz $\bigcup_{t \in [a,b]} B\big(\gamma(t), r\big) \subset G$.

3.7. Igaz-e bármely $A, B \subset \mathbb{R}^p$ halmazokra, hogy $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)$?

Beadható szorgalmi feladatok

3.8. Van-e olyan V nyílt halmaz a síkon, melynek vízszintes szekciójaként a számegyenes minden nyílt részhalmaza előáll, azaz minden $G \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazhoz van olyan $b \in \mathbb{R}$, amelyre

$$V \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = b\} = G \times \{b\} \ ?$$