

20. Analízis3 gyakorlat, 2022. nov. 24. 2-es csoport

20.1. Egy \mathbb{R}^3 -beli P pont gömbi koordinátái: (r, θ, ϕ) , ahol r az O origótól vett távolság, θ a szög OP és a z tengely között, ϕ pedig az OP szakasz xy -síkra vett vetületének az x tengellyel bezárt szöge. Határozzuk meg az $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$ gömbi koordináta-transzformációhoz tartozó Jacobi determinánst!

20.2. Határozzuk meg gömbi koordináták segítségével is félgömb súlypontját!

20.3. Igazold, hogy ha $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_0^1 \int_0^1 f(xy) \, dx \, dy = \int_0^1 f(t) \log \frac{1}{t} \, dt.$$

Gyakorló feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

20.4. Találjuk ki a hengerkoordináták definícióját és számítsuk ki a koordinátatranszformációhoz tartozó Jacobi determinánst!

20.5. Fejezzük ki az

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_d^2}{a_d^2} \leq 1$$

egyenletű p -dimenziós ellipszoid térfogatát γ_d -vel, azaz a d -dimenziós egységgömb térfogatából!

20.6. Gördítsünk körbe egy r sugarú kört egy fix r sugarú körön. A gördülő kör egy pontjának pályáját *kardioid*nak hívják. Határozzuk meg a kardioid által bezárt tartomány területét!