18. Analízis3 gyakorlat, 2022. nov. 17. 2-es csoport

18.1. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p, B \subset \mathbb{R}^q$ mérhető halmazok, $f : A \times B \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor az

$$x \mapsto \overline{\int_B} f(x,y)dy \qquad \text{és} \qquad x \mapsto \underline{\int_B} f(x,y)dy$$

függvények integrálhatóak A-n és

$$\int_A \left(\overline{\int_B} f(x,y)dy \right) dx = \int_{A\times B} f = \int_A \left(\underline{\int_B} f(x,y)dy \right) dx.$$

18.2. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető, és $f : A \to [0,\infty)$ Riemann-integrálható, továbbá minden $y \in \mathbb{R}$-re

$$A_{f>y} = \{x \in A : f(x) > y\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_A f = \int_0^\infty t(A_{f>y}).$$

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

18.3. Számítsuk ki az xy függvény integrálját az $[1,2] \times [3,5]$ téglalapon!

18.4. Legyen $A \subset [a,b]$ Jordan-mérhető $\mathbb{R}$-ben. Kössük össze A minden pontját egy adott síkbeli ponttal. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szakaszok uniója Jordan-mérhető a síkban. Mennyi a területe?

18.5. Bizonyítsuk be, hogy ha $f > 0$ a pozitív Jordan-mértékű $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, akkor $\overline{\int}_A f\,dx > 0$.

Beadható szorgalmi feladatok

18.6. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető halmaz, és legyen $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ esetén $A + \mathbf{d} = \{\mathbf{x} + \mathbf{d} : \mathbf{x} \in A\}$ az A eltoltja a $\mathbf{d}$ vektorral. Következik-e ebből, hogy

$$\lim_{\mathbf{d}\to\mathbf{0}} t\Big((A+\mathbf{d}) \setminus A\Big) = 0?$$