

## 17. Analízis3 gyakorlat, 2022. nov. 14. 2-es csoport

17.1. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/q & \text{ha } x, y \in \mathbb{Q}, x = p/q, (p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Léteznek-e az alábbi integrálok? Ha igen, határozzuk meg, ha nem, akkor vegyünk alsó illetve felső integrált a megfelelő helyeken és úgy számoljuk ki.

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx,$$

17.2. Legyen  $f$  korlátos és nemnegatív a mérhető  $A$  halmazon. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között?

(i)  $\overline{\int}_A f = 0$

(ii)  $k(\{x \in A : f(x) \geq a\}) = 0$  minden  $a > 0$ -ra

17.3. Igaz-e, hogy ha egy  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény minden vízszintes és minden függőleges szakaszon monoton, akkor integrálható?

### Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

17.4. Igaz-e, hogy  $\mathbb{R}^p$ -ben minden korlátos zárt halmaz Jordan-mérhető?

17.5. a) Igazold, hogy ha  $m : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  nemnegatív, additív, eltolás-invariáns és normált, akkor  $m = t$ .

b) Mutassuk meg, hogy a 4 feltétel egyike sem hagyható el.

17.6. Bizonyítsuk be, hogy a nulla külső mértékű halmazok sehol sem sűrűek.

17.7. Mekkora lehet a

a) belső

b) külső

mértéke megszámlálhatóan sok nulla külső mértékű halmaz uniójának?

### Beadható szorgalmi feladatok

17.8. Igaz-e, hogy ha  $A \subset \mathbb{R}^3$  korlátos halmaz, akkor az

$$A + [-1, 1]^3 = \{a + b : a \in A, |b_1| \leq 1, |b_2| \leq 1, |b_3| \leq 1\}$$

halmaz Jordan-mérhető?