16. Analízis3 gyakorlat, 2022. nov. 10. 2-es csoport

16.1. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások? (Bizonyítsuk be, vagy mutassunk ellenpéldát.)

(a) Ha $k(H) = 0$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\partial H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha $\partial H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(e) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(f) Ha $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$, és $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.

16.2. Legyenek $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ korlátos halmazok. Igazak-e a következő állítások?

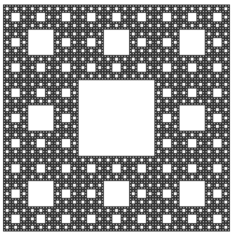
(a) $k^{(p+q)}(A \times B) = k^{(p)}(A) \cdot k^{(q)}(B)$?
(b) $b^{(p+q)}(A \times B) = b^{(p)}(A) \cdot b^{(q)}(B)$?
(c) Ha A és B mérhető, akkor $A \times B$ is mérhető, és $t^{(p+q)}(A \times B) = t^{(p)}(A) \cdot t^{(q)}(B)$?

16.3. Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ felsorolása $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pontjainak, amelyre a $B(a_n, 1/n)$ körlapok együttesen lefedik a síkot?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

16.4. Határozzuk meg a Sierpiński-szőnyeg külső és belső Jordan mértékét, és döntsük el, hogy mérhető-e!

(A Sierpiński-szőnyeg azokból az $(x, y) \in [0, 1]^2$ pontokból áll, amikre x-nek és y-nak van olyan 3-as számrendszerbeli $x = 0, x_1x_2\ldots$, illetve $y = 0, y_1y_2\ldots$ felírása, hogy bármely i indexre $x_i \neq 1$ vagy $y_i \neq 1$.)



16.5. Igaz-e, hogy tetszőleges $f : [0, 1] \to [0, 1]$

a) függvény
b) folytonos függvény

grafikonja mérhető?

16.6. Hol van az $x^3 - 3x + xy - xz + y^2 - z^2$ fügvénynek lokális minimuma, illetve maximuma?

Beadható szorgalmi feladatok

16.7. Pakoljunk megszámlálhatóan sok diszjunkt nyílt körlapot egy egységnégyzetbe mohó algoritmussal, azaz (egyenként rakva a körlapokat) mindig maximális sugarút téve. Mérhető-e a körlapok uniója?