15. Analízis3 gyakorlat, 2022. nov. 7. 2-es csoport

15.1. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban. Melyikből következik melyik?
(i) $f'(a) = 0$ és $d^2f(a)$ pozitív vagy negatív definit.
(ii) $f'(a) = 0$ és $d^2f(a)$ pozitív vagy negatív szemidefinit.
(iii) f-nek a-ban lokális szélsőértéke van.

15.2. Határozzuk meg a Cantor-halmaz belső mértékét, külső mértékét, Jordán mértékét (ha van) és döntsük el, hogy Jordan mérhető-e!

15.3. Tegyük fel, hogy $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \to \mathbb{R}$ konvex. Következik-e ebből, hogy f folytonos?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

15.4. Határozzuk meg az xyz függvény $(1, 2, 3)$ pontbeli első, második és harmadik Taylor polinomját!

15.5. Igazoljuk, hogy ha $f_1, ..., f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex fügvények, akkor a $g(x_1, \ldots, x_p) = f_1(x_1) + \ldots + f_p(x_p)$ függvény is konvex. Ellenőrizzük, hogy a d^2g kvadratikus alak mindenhol pozitív szemidefinit.

15.6. Határozzuk meg az alábbi függvény lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy$$

15.7. Milyen (a, b) számpárra létezik olyan síkbeli korlátos halmaz, amelynek belső mértéke a, külső pedig b?

Beadható szorgalmi feladatok

15.8. Létezik-e differenciálható Peano-görbe? (Azaz, olyan $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ differenciálható leképezés, amelynek értékkészlete tartalmazza $[0, 1]^2$-et.)

15.9. Igaz-e, hogy tetszőleges korlátos egyszerű ív nullmértékű?