

14. Analízis3 gyakorlat, 2022. nov. 3. 2-es csoport

14.1. Van-e olyan mindenütt kétszer folytonosan differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$D_1 f(x, y) = e^{x^2+y^2} \quad \text{és} \quad D_2 f(x, y) = \sin(x^3 y^3) ?$$

14.2. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $D_1 D_2 f$ második parciális deriváltja mindenhol létezik. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között?

- (i) Tetszőleges $a < b, c < d$ számokra $f(a, c) + f(b, d) \geq f(a, d) + f(b, c)$.
- (ii) $D_1 D_2 f$ sehol sem negatív.

14.3. Igaz-e, hogy ha egy többváltozós függvénynek egy adott pontban az összes parciális deriváltja létezik, beleértve a magasabb rendűeket is, akkor ott akárhányszor differenciálható?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

14.4. Írjuk fel a $\sin(x + y)$ függvény harmadik Taylor-polinomját a $(0, 0)$ pontban.

14.5. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ konvex. Bizonyítsuk be, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} : x \in H, y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

halmaz konvex!

14.6. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy $D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$.

Beadható szorgalmi feladatok

14.7. Legyen f kétváltozós, valós értékű függvény, és tegyük fel, hogy a $D_1 f, D_2 f$ és $D_{12} f$ parciális deriváltak léteznek az (a, b) pont egy környezetében, továbbá $D_{12} f$ folytonos (a, b) -ben. Következik-e ebből, hogy $D_{21} f(a, b)$ is létezik, és $D_{21} f(a, b) = D_{12} f(a, b)$?

14.8. Legyen $H \subset \mathbb{R}^{p+1}$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \text{int } H$ és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az (a, b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy $f(a, b) = 0$ és $D_{p+1} f(a, b) \neq 0$. Igazoljuk, hogy az $f(x, \varphi(x)) = 0$ ($\varphi(a) = b$) egyenlettel megadott φ implicit függvény kétszer differenciálható az a pontban, és írjuk fel a második deriváltját.