

## 12. Analízis3 gyakorlat, 2022. okt. 17. 2-es csoport

12.1. Legyen  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ ,  $|z| < 1$  esetén  $u(x, y, z)$  az

$$(2+x)U^3 + (1+y)U - (3+z)$$

polinom valós gyöke. Igazoljuk, hogy  $u$  differenciálható.  $u'(0, 0, 0) = ?$

12.2. Legyen  $f : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható az  $(a_1, \dots, a_p, b)$  pontban, és legyen  $c = f(a_1, \dots, a_p, b)$ . Mutassuk meg, hogy ha  $D_{p+1}f(a, b) \neq 0$ , akkor az  $f = c$  implicit felületnek az  $(a_1, \dots, a_p, b)$  pont körüli darabja egy differenciálható  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  függvény grafikonja.

12.3. Legyen  $q < p$ ,  $a \in \mathbb{R}^p$  és legyenek  $f_1, \dots, f_q$  folytonosan differenciálható függvények az  $a$  pont egy környezetében, amelyekre  $f_i(a) = 0$  minden  $i$ -re, és tegyük fel, hogy a  $\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_q(a)$  vektorok lineárisan függetlenek. Mutassuk meg, hogy az  $f_i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, q$ ) egyenletrendszerrel megadott hiperfelület, valamint a  $\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_q(a)$  vektorok által kifeszített vektortér az origóban merőleges egymásra.

### Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

12.4. a) Határozzuk meg az implicit függvénytétel segítségével is, hogy mely pontok alkalmas környezetében határoz meg az  $x^2 + xy + y^2 = 3$  egyenlet egy  $y(x)$  implicit függvényt?

b) Ezen pontokban mennyi  $y'(x)$  ?

12.5. Legyen  $|x| < 1$  esetén  $u(x)$  a

$$2U^3 + U - 3 = x$$

polinom valós gyöke. Igazoljuk, hogy  $u$  differenciálható.  $u'(0) = ?$

12.6. Tegyük fel, hogy az  $f(x, y, z) = 0$  egyenlet egy adott  $(a, b, c)$  ponton át az  $X(y, z)$ ,  $Y(x, z)$  és  $Z(x, y)$  differenciálható implicit függvényeket határozza meg! Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\partial X}{\partial y}(b, c) \cdot \frac{\partial Y}{\partial z}(a, c) \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}(a, b) = -1$$