

## 11. Analízis3 gyakorlat, 2022. okt. 15. 2-es csoport

**11.1.** Tegyük fel, hogy  $G \subset \mathbb{R}^p$  nyílt,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^q$  folytonosan differenciálható és  $f'$  minden pontban szürjektív. Következik-e ebből, hogy  $f(G)$  nyílt?

**11.2.** a) Mely pontok alkalmas környezetében határoz meg az  $x^2 + xy + y^2 = 3$  egyenlet egy  $y(x)$  implicit függvényt?

b) Ezen pontokban mennyi  $y'(x)$  ?

**11.3.** Bizonyítsuk be a Banach féle fixponttétel segítségével, hogy ha  $A$  és  $B$  olyan  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformációk, amelyekre teljesül, hogy  $A$  invertálható és  $\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ , akkor  $B$  is invertálható!

(Zárójeles kérdés: Kijön ez sokkal egyszerűbben csak lineáris algebrával?)

### Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

**11.4.** Legyen  $f(x, y, z) = (x^2 + yz, z^3)$ .

a) Hol lokálisan injektív  $f$ ?

b) Hol van lokális inverz?

c) Hol lokálisan szürjektív  $f$ ?

### Beadható szorgalmi feladatok

**11.5.** Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy tetszőleges fix  $y_0$ -ra  $f(x, y_0)$  folytonos, tetszőleges fix  $x_0$ -ra pedig  $f(x_0, y)$  szigorúan monoton nő és folytonos; továbbá tegyük fel, hogy  $f(a, b) = 0$ .

a) Bizonyítsuk be, hogy  $a$  egy elég kis környezetében létezik pontosan egy olyan  $g(x)$  függvény, amely kielégíti az  $f(x, g(x)) = 0$  implicit függvényegyenletet és  $g(a) = b$ .

b) Igaz-e, hogy  $g$  biztosan folytonos?