10. Analízis3 gyakorlat, 2022. okt. 13. 2-es csoport

Ne feledjétek, hogy most szombaton (okt. 15.) is lesz előadás és gyakorlat is, hétfői órarend szerint!

10.1. Legyen $f(x,y) = (x^3 + xy,\ y)$.
a) Hol lokálisan injektív f? Mi van a többi pontban?
b) Hol van lokális inverz? Mi az inverz deriváltja $(3,2)$-ben?
c) Hol lokálisan szürjektív f? Mi van a többi pontban?

10.2. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre tetszőleges x, y esetén

$$y^2 \cdot D_1 f(x,y) = x^2 \cdot D_2 f(x,y).$$

(a) Bizonyítsd be, hogy $f(x,y) = g(x^3 + y^3)$ egy alkalmas g függvénnyel.
(b) Igazold, hogy g differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.
(c) Igaz-e, hogy a g függvény differenciálható a 0-ban?

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

10.3. Legyen $f(x,y,z) = (x^2 + yz, z^3)$.
a) Hol lokálisan injektív f?
b) Hol van lokális inverz?
c) Hol lokálisan szürjektív f?

10.4. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $|y| < \frac{\pi}{2}$ esetén $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Írjuk fel a függvény inverzét, és ellenőrizzük az inverz függvény differenciálási szabályát.

Beadható szorgalmi feladatok

10.5. Adott egy $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex függvény. Az F minimumát a *konjugált gradiens módszerrel* keressük: veszünk egy x_0-t, majd legyen

$$x_{n+1} = x_n - c(x_n) \cdot \mathrm{grad} f(x_n),$$

ahol a $c(x_n)$ számot az f függvény x_n-beli első és második deriváltjából számítjuk.
(a) Mi legyen $c(x_n)$?
(b) Igazoljuk, hogy a módszer működik másodfokú polinomokra.
(c) Keressünk más elégséges feltételt a módszer működésére.