1.Analízis3 gyakorlat, 2022. szept. 12., 2-es csoport

- Jelenlét, készülés:
  - A gyakorlaton a részvétel kötelező. Aki a gyakorlatok több, mint haramadáról hiányzik, nem kaphat gyakorlati jegyet.
  - A házi feladatok megoldása, de legalább alapos gondolkodás a feladatokon szintén kötelező.
- Számonkérés:
  - A két ZH-n kívül
  - Minden gyakorlat elején véletlenszerűen vagy írunk, vagy nem írunk röpdolgozatot az egyik házi feladatból. A röpdolgozatokra 0–6 pontot lehet kapni. Aki hiányzik, vagy lekési a dolgozatírást, annak a pontszáma 0.
  - Lesznek valamivel gondolkodtatóbb vagy munkásabb beadható szorgalmi feladatok, amelyekkel plusz pontokat lehet gyűjteni. Egy beadható feladat értéke 0,2 gyakorlati jegy, de ezek csak az elégséges osztályzat megszerzése után használhatók fel.
- Várható osztályozás:
  - A gyakorlati jegy
    $$\approx \frac{2 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + \overline{R}}{5} + P \cdot 0,2,$$
    ahol $0 \le Z_1, Z_2 \le 7$ a két ZH pontszám, $0 \le \overline{R} \le 6$ a röpdolgozatok átlaga a legrosszabbul sikerült dolgozat nélkül, P a megoldott beadható száma.
  - Javítási lehetőség: a pót ZH-n, ami a rosszabbul sikerült vagy elmulasztott ZH helyett számít.
- További gyakorló feladatok: Fehér–Kós–Tóth: Analízis feladatgyűjtemény II, http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101

1.1. Írjuk fel a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget összegekkel, normákkal, integrálokkal és valószínűségi változók várható értékeivel.

1.2. Vezessük le a számtani-négyzetes közép közötti összefüggést a C-S-B egyenlőtlenségből!

1.3. Teljes metrikus tér-e a $C\big([0,1]\big)$ tér
(a) a maximumnormával?
(b) az $\|.\|_1$ normával?

1.4. Igazoljuk, hogy minden metrikus tér kiegészíthető teljes metrikus térré, és minden normált valós vektortér kiegészíthető teljes normált vektortérré (Banach-térré).

1.5. Milyen p-re van olyan pontsorozat $\mathbb{R}^p$-ben, amelynek $\mathbb{R}^p$ minden x pontjához van x-hez tartó részsorozata?

1.6. (a) Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel, akkor a tér teljes.
(b) Mutassunk példát olyan metrikus térre, ami teljes, de nem teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel.

Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

1.7. Írjuk fel a Hölder-egyenlőtlenséget összegekkel, normákkal, integrálokkal és valószínűségi változók várható értékeivel.

1.8. A Hölder-egyenlőtlenség segítségével mutassuk meg, hogy a számtani közép legfeljebb akkora mint az s-edik hatványközép, ha $s > 1$.

Beadható szorgalmi feladatok

PM1.1. Homeomorf-e $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, azaz van-e köztük oda-vissza folytonos bijekció?