

## Lokális szélsőértékek, görbék, vektorértékű leképezések

1. Adjunk meg paraméteres görbét, melynek képe a  $(2, 3)$  középpontú 5 sugarú körvonal! Hány ilyen paraméteres görbe van?
2. Egy  $O$  középpontú  $R$  sugarú körre történő tükrözés (más néven " $O$  középpontú  $R^2$  hatványú inverzió") az a geometriai transzformáció a síkon, amely minden  $P \neq O$  pontot olyan  $Q$  pontba visz, amely rajta van az  $OP$  félegyenesen, és amelyre az  $OP$  és  $OQ$  szakaszok hosszának szorzata  $R^2$ .
  - a) Írjuk fel az origó középpontú 1 hatványú inverzió koordinátafüggvényeit és adott pontbeli Jacobi-mátrixát!
  - b) Adjuk meg az origó középpontú  $R^2$  hatványú inverziót polárkoordináták segítségével is!
3. Paraméterezzük az origó középpontú egységömb felszínét, azaz adjuk meg paraméteres felületként!
4. Van-e differenciálható paraméterezése az  $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$  függvény grafikonjának, azaz van-e olyan differenciálható paraméteres görbe, melynek képe ennek a függvénynek a grafikonja?

5. Vizsgáljuk meg az

$$f(x, y) = xy(x + y - 1) = x^2y + xy^2 - xy$$

függvényt.

- (a) Rajzoljuk meg a 0-hoz tartozó szintvonalat.
  - (b) Számítsuk ki a parciális deriváltakat.
  - (c) Hol 0 a gradiens?
  - (d) Melyik pontokban van lokális szélsőérték?
  - (e) Számítsuk ki a Hesse mátrixot a 0 gradiensű pontokban.
  - (f) Vázoljunk néhány szintvonalat (lehetőleg minden típusból legalább egyet).
  - (g) Valamilyen programmal ábrázoljuk a grafikonot és keressük meg a *tengerszemet*.
  - (h) A  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  pontok által meghatározott háromszöglemezen keressük meg a függvény minimumát. Indokoljunk is!
6. Ismétlőpélda: Rajzoltassuk ki geogebrával az  $x^a$  függvény grafikonját  $a \in [-5, 5]$  néhány értékére. Használjunk  $a$ -ra csúszkát. Külön rajzoljuk meg az  $a = 1,1$  esetet, és számoljuk ki 0-ban a jobboldali deriváltat. Magyarázzuk meg a jelenséget.
  7. Az  $f(z) = z^2$  komplex függvényt írjuk fel  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezésként, adjuk meg a koordinátafüggvényeit és adott pontbeli Jacobi-mátrixát!