Leíró halmazelmélet 9. gyakorlat, 2022. április 21.

52.** (Meghosszabbított feladat) (Effros Borel tér) Legyen X lengyel tér, $\mathcal{F}(X)$ jelölje X zárt halmazainak rendszerét. Legyen $\mathcal{B}$ az

$$\{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

alakú halmazok által generált σ-algebra, ahol $U \subseteq X$ nyílt. Lássuk be, hogy $(\mathcal{F}(X), \mathcal{B})$ standard Borel tér.

53. A differenciálható függvények koanalitikus halmazt alkotnak $C([0,1])$-ben.

54. Lássuk be, hogy $\mathbf{\Sigma}_1^1$-determináltság $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Pi}_1^1$-determináltság.

55. Tekintsük az első feladatsorról ismert Banach-Mazur játékot. Mutassuk meg, hogy ez nem mindig eldöntött. (Azaz lehet, hogy nincs senkinek se nyerő stratégiája)

56. Ha X lengyel tér és $A \subseteq X$ analitikus, akkor A Baire tulajdonságú.

57. Adott S σ-algebra esetén azokat a halmazokat tekintjük *kis halmazok*nak, melyek minden részhalmaza S-beli. Melyek a kis halmazok $\mathbb{R}$-ben a Lebesgue-mérhető, a Baire-tulajdonságú és a Borel halmazok σ-algebráira nézve?

58.* Egy mértéket *folytonos*nak mondunk, ha minden pont nullmértékű. Lássuk be, hogy bármely két standard Borel téren értelmezett folytonos Borel valószínűségi mérték izomorf, azaz van olyan Borel izomorfizmus, ami mindkét irányban mértéktartó.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.