Leíró halmazelmélet 8. gyakorlat, 2022. április 7.

47. (Annak, aki nem ismeri.) A számegyenesnek van olyan B részhalmaza, amelyre sem B, sem $\mathbb{R} \setminus B$ nem tartalmaz nem-üres perfekt halmazt. (Az ilyen halmazokat nevezik *Bernstein-halmaz*nak.)

48. Az alábbi halmazokról bizonyítsuk be, hogy analitikusak!

a) $\{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\exists k_1 < k_2 < \dots)\ a_{k_1} | a_{k_2}, a_{k_2} | a_{k_3}, \dots\}$;

b) differenciálható függvények $C([0,1])$-ben;

c)* $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \text{ nem megszámlálható}\}$ analitikus.

49. Lássuk be, hogy ha X, Y lengyel terek $f : X \to Y$ függvény, akkor a következők ekvivalensek:

i) f Borel mérhető,

ii) f grafikonja Borel részhalmaza $X \times Y$-nak,

iii) f grafikonja analitikus.

50. Lássuk be, hogy minden lengyel tér beleinjektálható a Cantor-halmazba egy Borel leképezéssel.

51. Mutassuk meg, hogy ha az X és Y lengyel terek között van $X \to Y$ és $Y \to X$ Borel injekció, akkor van köztük Borel izomorfizmus.

52.** (Effros Borel tér) Legyen X lengyel tér, $\mathcal{F}(X)$ jelölje X zárt halmazainak rendszerét. Legyen $\mathcal{B}$ az

$$\{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

alakú halmazok által generált σ-algebra, ahol $U \subseteq X$ nyílt. Lássuk be, hogy $(\mathcal{F}(X), \mathcal{B})$ standard Borel tér.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.