Leíró halmazelmélet 7. gyakorlat, 2022. március 31.

42. a) Ha (X, τ) lengyel tér, $B_1, B_2, \dots \subseteq X$ Borel halmazok, akkor van olyan $\tau' \supseteq \tau$ lengyel topológia, hogy $B_n \in \mathbf{\Delta}^0_1(\tau')$ minden n-re.

b) Ha (X, τ) lengyel tér, $f : X \to \mathbb{R}$ Borel, akkor van olyan $\tau' \supseteq \tau$ lengyel topológia, hogy $f : (X, \tau') \to \mathbb{R}$ folytonos.

43. a) Van olyan $F \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ relatív zárt, ami folytonos injekcióval $(0, 1)$-re képezhető.

b) Létezik $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zárt, hogy $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ előáll F folytonos injektív képeként.

c) Bármely Y lengyel térre létezik $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zárt, hogy Y folytonos injektív képe F-nek.

d) Ha X lengyel tér, $B \subseteq X$ Borel halmaz, akkor B előáll, mint $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ egy zárt részhalmazának folytonos injektív képe.

44. Az alábbi halmazokról bizonyítsuk be, hogy analitikusak!

a) Tetszőleges $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel halmazra azon $r > 0$ valósak, hogy van B-nek az origótól r távolságra pontja.

b) $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap B \neq \emptyset\}$, ahol X lengyel tér és $B \subseteq X$ Borel.

45.* Van olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ függvény, amelynek grafikonja nem első kategóriájú $[0, 1]^2$-ben, és olyan is, ami nem (Lebesgue) nullmértékű.

46.** Ha (X, τ) lengyel tér, minden $n \in \mathbb{N}$-re $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\xi(\tau)$, akkor van olyan $\tau \subseteq \tau' \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(\tau)$ lengyel topológia, amelyre minden n esetén $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_1(\tau')$.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.