Leíró halmazelmélet 6. gyakorlat, 2022. március 24.

36. (Csak annak, aki még nem ismeri.) Bontsuk fel a számegyenest egy első kategóriájú és egy nullmértékű halmaz uniójára.

37. Ha X és Y M_2 Baire terek, akkor $X \times Y$ is Baire tér.

38. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Ha f

a) monoton, vagy

b) korlátos változású, vagy

c) félig folytonos, vagy

d) deriváltfüggvény (azaz van olyan $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $f = g'$), vagy

e) csak megszámlálhatóan sok pontban nem folytonos,

akkor f Baire-1.

39. *Fa* egy A halmazon A-beli véges sorozatok kezdőszeletre zárt halmazát jelenti. A T fát *gallyazott*nak mondjuk, ha T minden elemének van T-beli valódi kiterjesztése.

Tekintsük A-n a diszkrét topológiát és mutassuk meg, hogy ha T egy gallyazott fa A-n, akkor

a) a végtelen ágaiból álló

$$[T] = \{x \in A^\omega : (\forall n \in \omega)\ x|_n \in T\} \subseteq A^\omega$$

halmaz zárt,

b) a $T \mapsto [T]$ leképezés bijekció az A-n lévő gallyazott fák és A^ω zárt részhalmazai között.

40. Egy lengyel terek közötti $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor Baire tulajdonságú (minden nyílt ősképe Baire-tulajdonságú halmaz), ha van olyan $R \subseteq X$ reziduális halmaz, amelyre $f|_R$ folytonos.

41.* a) A valós számoknak nincs Baire tulajdonságú jólrendezése, azaz nincs $\mathbb{R}$-en olyan $\prec$ jólrendezés, amelyre $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \prec y\}$ a sík Baire-tulajdonságú részhalmaza.

b) Van olyan nem megszámlálható lengyel tér, amelynek van Baire-tulajdonságú jólrendezése.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.