Leíró halmazelmélet 5. gyakorlat, 2022. március 17.

30. Legyen (X, τ) Baire (azaz semmilyen nemüres nyílt halmaz sem első kategóriájú). Jelölje $\mathcal{M}$ az első kategóriájúak rendszerét, és nevezzünk egy halmazt reziduálisnak, ha a komplementere első kategóriájú. Ekkor

(1) $\mathcal{M}$ σ-ideál

(2) R_n $(n \in \omega)$ reziduális $\Rightarrow \bigcap_n R_n$ is az

(3) H nyílt sűrű $\Leftrightarrow H^c$ sss zárt

(4) H tartalmaz nyílt sűrűt $\Leftrightarrow$ H^c sss

(5) H tartalmaz sűrű G_δ-t $\Leftrightarrow$ H reziduális

(6) A_n sűrű $G_\delta \Rightarrow \bigcap_n A_n$ is az

(7) H zárt $\Rightarrow$ (első kat. $\Leftrightarrow$ H sss $\Leftrightarrow \operatorname{int} H = \emptyset$)

(8) H F_σ $\Rightarrow$ (első kat. $\Leftrightarrow \operatorname{int} H = \emptyset$)

(9) H G_δ $\Rightarrow$ (első kat. $\Leftrightarrow$ sss)

31. Lássuk be, hogy a tipikus $f \in C([0,1])$ függvény egyetlen intervallumon sem monoton.

32. a) Ha f Baire-α és g folytonos, akkor $f \circ g$ és $g \circ f$ Baire-α.

b) Ha f Borel-α, g Borel-β, akkor $g \circ f$ Borel-$\alpha + \beta$.

33. a) Ha $B \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\left([0,1]^2\right)$, akkor az $f(x) = \lambda(B^x)$ függvény Baire-α.

b) Ha $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel, akkor $\{x \in \mathbb{R} : \lambda(A^x) = 0\}$ Borel.

34.* Bizonyítsuk be, hogy a tipikus $K \in \mathcal{K}([0,1])$ halmaz lineárisan független $\mathbb{Q}$ felett.

35.** Kontinuum hipotézis esetén van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekció, amelyre $f(H)$ pontosan akkor Lebesgue nullmértékű, ha H első kategóriájú.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.