

Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2022. március 3.

15. Legyen X, Y lengyel tér, $f : X \rightarrow Y$ folytonos. Ekkor $A \in \Sigma_\alpha^0(Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma_\alpha^0(X)$, hasonlóan $\Pi_\alpha^0, \Delta_\alpha^0$ -ra.

16. Az alábbi halmazokról lássuk be, hogy Borel halmazok.

a) $[0, 1]$ -ben a kettes számrendszerben felírva normális számok halmaza. ($x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ normális, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{i \leq n : a_i = 0\}|}{n} = \frac{1}{2}).$$

b) $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ -ben a konvergens sorozatok halmaza.

17. Lengyel térben legfeljebb kontinuum sok Borel halmaz van. Ha a tér végtelen, akkor van is annyi.

18. Bizonyítsuk be a Cantor-Bendixon tételt a 13. feladat segítségével!

19. Mutassunk meg, hogy az \mathbb{N}^ω térnek van olyan folytonos metrizable képe, ami nem legyel.

20.* Létezik-e \mathbb{R}^2 -ben univerzális Borel halmaz? (azaz olyan Borel részhalmaza a síknak, hogy minden számegeenesbeli Borel előáll vízszintes szekciójaként)

21.* Van olyan kontinuum számosságú rendezett halmaz, amibe minden ω_1 számosságú rendezett halmaz beleinjektálható rendezéstartó módon. (Azaz CH mellett van ω_1 -es univerzális.)

A feladatsorok elérhetőek a <http://keletita.web.elte.hu> oldalon.