Leíró halmazelmélet 11. (utolsó) gyakorlat, 2022. május ?.

64.* (meghosszabbítva) Lássuk be, hogy ha egy $\mathcal{B}$ σ-algebrára nézve minden halmaznak van burka (tehát minden H halmazhoz létezik $H \subseteq B \in \mathcal{B}$, hogy $B' \subseteq B$, $B \setminus B'$ nem $\mathcal{B}$-kicsi esetén $H \nsubseteq B'$), akkor az $\mathcal{A}$-operáció nem vezet ki $\mathcal{B}$-ből.

65. Igaz-e a számegyenesen, hogy a
a) Lebesgue-mérhető
b) Baire-tulajdonságú
c) Borel
halmazok σ-algebrájára nézve minden halmaznak van burka?

66. Lássuk be, hogy a Borel halmazok osztályára nem teljesül az uniformizáció. (Azt mondjuk, hogy halmazok egy Γ osztályára teljesül az *uniformáció*, ha minden X, Y lengyel térre és minden $B \subseteq X \times Y$ Γ-beli halmazhoz létezik $B' \subseteq B$, $B' \in \Gamma$, hogy $B_x \neq \emptyset$ esetén B'_x egy elemű.)

67. Legyen $CN_0 = \{(f_n) \in C([0,1])^\omega : f_n \to 0 \text{ pontonként}\}$. Lássuk be, hogy CN_0 nem Borel halmaz $C([0,1])^\omega$-ban.

68. A cut-and-choose játék egy X perfekt lengyel téren zajlik, melyen adott egy d teljes metrika, egy $A \subseteq X$ halmaz és egy megszámlálható bázis. I és II játszanak a következőképpen:

$$\begin{array}{llllll} I & (U_0^0, U_1^0) & & (U_0^1, U_1^1) & & \cdots \\ II & & i_0 & & i_1 & \cdots \end{array}$$

ahol U_i^n bázisnyíltak, $\operatorname{diam}(U_i^n) < 2^{-n}$, $\overline{U_0^n} \cap \overline{U_1^n} = \emptyset$, $i_n \in \{0,1\}$ és $\overline{U_0^{n+1} \cup U_1^{n+1}} \subseteq U_{i_n}^n$. Legyen $x \in X$ az az elem, amire $\{x\} = \bigcap_n U_{i_n}^n$. A játék egy lefolyását pontosan akkor nyeri I, ha $x \in A$. Lássuk be, hogy

a) I-nek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha A tartalmaz egy Cantor-halmazt,

b)** II-nek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha A megszámlálható.

c) (fakultatív feladat) Bizonyítsuk be, hogy az analitikus halmazok rendelkeznek a perfekt halmaz tulajdonsággal.

69. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_n^1) \Rightarrow$ a $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$ halmazok Baire-tulajdonságúak.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.