2010. április 21.

Leíró halmazelmélet

9. feladatsor

1. Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Melyikből állításból következik a másik?

   (i) E Baire tulajdonságú.

   (ii) E Lebesgue mérhető.

2. Legyen $\mathcal{U}$ olyan ultraszűrő $\mathbb{N}$-en, amely nem főszűrő. Tekintsük $\mathcal{U}$-t mint a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ szorzattér részhalmazát! Lehet-e $\mathcal{U}$ Baire tulajdonságú?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha A második kategóriájú Baire tulajdonságú részhalmaza egy lengyel csoportnak, akkor az

   $$A^{-1}A = \{x^{-1}y : x, y \in A\}$$

   halmaz tartalmazza az egységelem egy nyílt környezetét!

4. Bizonyítsuk be, hogy lengyel tér tetszőleges Baire tulajdonságú részhalmazához van pontosan egy reguláris nyílt halmaz (azaz olyan halmaz, amely megegyezik a lezártjának a belsejével), melytől első kategóriájú halmazban tér el!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha f Baire tulajdonságú homomorfizmus két lengyel csoport között, akkor folytonos!

A teljesség kedvéért az április 15.-i előadáson föladott feladatok:

1. Bizonyítsuk be a topologikus 0-1 törvényt: ha $H \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ olyan Baire tulajdonságú halmaz, amelyre bármely két véges sok helyen eltérő $[0,1]$-beli sorozat közül vagy egyik sincs H-ban, vagy mindkettő H-ban van, akkor H első kategóriájú vagy reziduális!

2. Van-e univerzális Δ^0_α halmaz?