2010. április 7.

Leíró halmazelmélet

7. feladatsor

1. Milyen Borel osztálybeli halmazokra igaz minden Baire térben, hogy

   a) sűrű $\Longleftrightarrow$ reziduális?

   b) belseje üres $\Longleftrightarrow$ első kategóriájú?

2. a) Adjunk meg $C^1[0,1]$-en, valamint általában $C^n[0,1]$-en $(n = 1, 2, \ldots)$ olyan természetes metrikát, amely lengyel teret ad!

   b) Bizonyítsuk be, hogy tipikus $C^1[0,1]$-beli függvény a 0-t véges sokszor veszi fel!

   c) (HF) Bizonyítsuk be, hogy $n = 2, 3, \ldots$ esetén tipikus $C^n[0,1]$-beli függvény minden értéket véges sokszor vesz fel!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy (X, d) szeparábilis metrikus tér minden d-vel ekvivalens metrikával teljes, akkor (X, d) kompakt!

4. (HF) Milyen κ számosság esetén G_δ halmazok a pontok a

   a) $\{0,1\}^\kappa$

   b) $[0,1]^\kappa$

   topologikus térben?

A teljesség kedvéért a március 18.-i és 25.-i előadáson föladott feladatok:

1. Előáll-e $[0,1]$

   a) véges sok (de egynél több) diszjunkt zárt halmaz uniójaként?

   b) megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt zárt halmaz uniójaként?

2. Bizonyítsuk be, hogy az ω^ω téren a következő két metrika ekvivalens:

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(|x_n - y_n|, 1)}{2^n},$$

$$d_2(x, y) = \frac{1}{k} \text{ ha a } k. \text{ helyen van az első eltérés.}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $X \subset [0,1]$ Baire tér, amelyre az X halmaz $[0,1]$-ben

   a) nem G_δ, sőt nem Borel!

   b) Borel, de nem G_δ!

4. Bizonyítsuk be, hogy minden teljes metrikus tér Cech-teljes!