2010. március 17.

Leíró halmazelmélet

6. feladatsor

1. Milyen hosszú lehet $\mathbb{R}^n$-ben

   a) nyílt halmazok jólrendezett felszálló lánca?

   b) nyílt halmazok jólrendezett fogyó lánca?

   c) zárt halmazok jólrendezett felszálló lánca?

   d) zárt halmazok jólrendezett fogyó lánca?

Definíció. Adott X topologikus tér esetén definiáljuk X^α-t transzfinit rekurzióval a következő módon: legyen

$$X^0 = X,$$

$$X^\alpha = X^\beta \setminus \{X^\beta \text{ izolált pontjai}\}, \text{ ha } \alpha = \beta + 1,$$

$$X^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta, \text{ ha } \alpha \text{ limesz rendszám.}$$

Az X topologikus tér *Cantor-Bendixson rang*ján azt a minimális α-t értjük, amelyre $X^\alpha = X^{\alpha+1}$.

2. a) Bizonyítsuk be, hogy minden topologikus térnek van Cantor-Bendixson rangja!

   b) Mi lehet $\mathbb{R}^n$ egy zárt részhalmazának Cantor-Bendixson rangja?

   c) Adjunk ennek segítségével újabb bizonyítást arra, hogy $\mathbb{R}^n$ minden zárt halmaza felbontható egy perfekt és egy megszámlálható halmaz uniójára!

3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan 1 Lipschitz konstansú $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz függvény, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ pontban legalább az egyik Dini derivált 1 vagy -1, továbbá sűrűn vannak olyan x-ek, ahol van 1 Dini derivált, és azok is, ahol van -1 Dini derivált!

4. Milyen κ számosság esetén metrizálható a

   a) $\{0,1\}^\kappa$

   b) $[0,1]^\kappa$

   topologikus tér?

A teljesség kedvéért a március 11.-i előadáson föladott feladat:

- Mutassunk olyan folytonos $[0,1] \to [0,1]$ függvényt, amelynek minden szinthalmaza perfekt!