2010 március 10.

Leíró halmazelmélet

5. feladatsor

Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény *erősen deriválható* az a pontban, ha az $(f(y)-f(x))/(y-x)$ kétváltozós függvénynek létezik a véges határértéke az (a, a) pontban.

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $a \in \mathbb{R}$. Mi az alábbi állítások logikai kapcsolata?
   (i) f erősen differenciálható a-ban.
   (ii) f differenciáható a egy környezetében és f' folytonos a-ban.
   (iii) f folytonos a egy környezetében és f differenciálható a-ban.
   (iv) f és D_+f folytonos a-ban.
   (v) f és D_-f folytonos a-ban.
   (vi) f és D^+f folytonos a-ban.
   (vii) f és D^-f folytonos a-ban.
2. Mutassunk olyan függvényt, amelyre pozitív mértékű halmaz felett a grafikonnak balról félsík a kontingense, jobbról pedig $+\infty$ a derivált!
3. Legyen C az az $1/2$ mértékű szimmetrikus Cantor-halmaz, amelyet úgy kapunk, hogy a $[0, 1]$-ből indulva az n-edik lépésben összesen 2^{-n-1} mértékű intervallumokat hagyunk el. Mit tudunk mondani $f(C)$ mértékéről tipikus folytonos f esetén?

A teljesség kedvéért a március 4.-i előadáson föladott feladat:

- Mutassunk olyan függvényt, amelyre a Denjoy-Young-Saks tétel mind a négy esete pozitív mértékű halmaz fölött fordul elő!