2010 március 3.

Leíró halmazelmélet

4. feladatsor

1. Mely Dini-deriváltakra igaz, hogy ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek ez a Dini-deriváltja a teljes (a, b)-n $[c, d]$-be esik, akkor $[a, b]$-n f tetszőleges húrjának meredeksége is $[c, d]$-be esik?

2. Mely halmazok állnak elő

   a) tetszőleges

   b) folytonos

   függvénygrafikon adott pontban vett kontingenseként?

3. Bizonyítsuk be, hogy a Cantor-függvény grafikonjának azon pontjai, amelyek olyan Cantor-halmazbeli pont fölött vannak, ahol nem $+\infty$ a derivált, nullhosszú halmazt alkotnak!

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $H \subset \mathbb{R}^n$-en értelmezett

   a) valós értékű Lipschitz függvény kiterjeszthető a teljes $\mathbb{R}^n$-re ugyanolyan Lipschitz konstanssal!

   b) $\mathbb{R}^k$ értékű Lipschitz függvény kiterjeszthető a teljes $\mathbb{R}^n$-re alkalmas Lipschitz konstanssal!

   c) * $\mathbb{R}^k$ értékű Lipschitz függvény kiterjeszthető a teljes $\mathbb{R}^n$-re ugyanolyan Lipschitz konstanssal!

5. Van-e S_∞-n balinvariáns kompatibilis teljes metrika?

A teljesség kedvéért a február 25.-i előadáson föladott feladat:

- Mutassunk olyan egyenletes folytonos $f : H \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $H \subset \mathbb{R}$ nullmértékű, az f függvény grafikonja mégsem nullhosszú!