2010 február 17.

Leíró halmazelmélet

2. feladatsor

1. Mely rendszámok kompaktak?
2. Hány olyan összefüggő nemüres T_2 topologikus tér van, amelyben minden pontnak van $\mathbb{R}$-rel homeomorf környezete?
3. (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz c.c.c., akkor nem elfajuló intervallumok tetszőleges rendszeréből kiválasztható megszámlálható, melyek lefedik az eredeti intervallumok unióját!
4. (HF) Határozzuk meg, hogy az alábbi (X, τ) topologikus terekre mely szétválasztási axiómák teljesülnek!

   a) X végtelen halmaz, $\tau = \{H \subset X : X \setminus H \text{ véges } \}$.

   b) *Félegyenes topológia*: $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a) \text{ és } (-\infty, a] \text{ alakú félegyenesek}\}$.

   c) *Sorgenfrey egyenes*: $X = \mathbb{R}$, bázis: $[a, b)$ alakú intervallumok.

   d) *Niemytzki-sík*: $X = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, a topológiát pedig az euklideszi nyíltak és az $\{(x, 0)\} \cup B((x, h), h)$ alakú halmazok generálják.

A teljesség kedvéért a február 11.-i előadáson föladott feladat:

- Bizonyítandó, hogy egy $(X, <)$ rendezett halmaz pontosan akkor teljes, ha minden intervallum X, $\emptyset$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞) vagy $[a, \infty)$ alakú.