2010 február 10.

Leíró halmazelmélet

1. feladatsor

Rendezett halmazok

Definíció. Egy $(X, <)$ rendezett halmaz I részhalmaza *intervallum*, ha $x, z \in I$, $y \in X$, $x < y < z$ esetén $y \in I$.

1. Egy megszámlálható rendezett halmaz legfeljebb hány intervallumot tartalmazhat?

Definíció. Két rendezett halmazt *izomorfnak* nevezünk, ha van közöttük rendezéstartó bijekció.

2. Mutassunk univerzális megszámlálható rendezett halmazt, azaz olyan megszámlálható rendezett halmazt, amely minden megszámlálható rendezett halmazhoz tartalmaz vele izomorfat!

3. (HF) Álljon X azon ω_1 hosszúságú $0-1$ sorozatokból, amelyekben csak megszámlálhatóan sok 1-es szerepel. Vegyük X-en a lexikografikus rendezést.

   a) Határozzuk meg X számosságát!

   b) Bizonyítsuk be, hogy X minden ω_1 számosságú rendezett halmazhoz tartalmaz vele izomorfat!

   c) Mutassuk meg, hogy (CH)-ból következik univerzális kontinuum számosságú rendezett halmaz létezése!

4. Jellemezzük a $\mathbb{Q}$-val izomorf rendezett halmazokat!

Definíció. Egy $(X, <)$ rendezett halmaz H részhalmaza *sűrű*, ha belemetsz minden nemüres $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$, $(-\infty, a) = \{x \in X : x < a\}$, illetve $(a, \infty) = \{x \in X : a < x\}$ alakú halmazba. Az $(X, <)$ rendezett halmaz *szeparábilis*, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza.

5. Igaz-e, hogy minden szeparábilis rendezett halmaz izomorf $\mathbb{R}$ egy részhalmazával?

Definíció. Legyen $(X, <)$ rendezett halmaz. X *rendezéstopológiáján* az (a, b), $(-\infty, a)$ és (a, ∞) alakú halmazok által generált topológiát értjük.

6. Egy X rendezett halmaz Y részhalmazán kétféleképpen is definiálhatunk topológiát: egyrészt tekinthetjük Y-t mint az X topologikus tér alterét, másrészt tekinthetjük Y-t mint rendezett halmazt és vehetjük rajta a rendezéstopológiát.

   Igaz-e, hogy ez a kettő mindig megegyezik?

7. (HF) A rendezéstopológia mely tulajdonságával ekvivalens, hogy egy rendezett halmaz izomorf $\mathbb{R}$ valamely részhalmazával?