Leíró halmazelmélet 10. gyakorlat, 2022. április 28.

59. Lássuk be, hogy

a) a fák zárt,

b) a jólfundált fák koanalitikus

halmazt alkotnak ($2^{\mathbb{N}^{<\omega}}$-ban).

60. Egy $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ fa pontosan akkor jól-fundált, ha a T-re megszorított Kleene-Brouwer rendezés jólrendezés.

61. Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Borel halmazok. Tekintsük a Wadge játékot: két játékos felváltva mond számjegyeket $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-beli számokhoz, I. építi $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-et, II. építi $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-et. II. nyer, ha $x \in A \Leftrightarrow y \in B$.

a) Lássuk be a Martin-tétel felhasználásával, hogy ez a játék eldöntött.

b) (Wadge lemma) Jelölje $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ esetén $X \leq_W Y$ azt, hogy létezik folytonos $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, amelyre $X = f^{-1}(Y)$. Bizonyítsuk be hogy ha $A, B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ két Borel halmaz, akkor $A \leq_W B$ vagy $B \leq_W A^c$.

62. Mutassuk meg, hogy a kompakt metrikus terek a lengyel terek $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ standard Borel terének Borel részhalmaza.

63.* Nincsen analitikus Hamel bázis.

64.* Lássuk be, hogy ha egy $\mathcal{B}$ σ-algebrára nézve minden halmaznak van burka (tehát minden H halmazhoz létezik $H \subseteq B \in \mathcal{B}$, hogy $B' \subseteq B$, $B \setminus B'$ nem $\mathcal{B}$-kicsi esetén $H \nsubseteq B'$), akkor az $\mathcal{A}$-operáció nem vezet ki $\mathcal{B}$-ből.

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.