Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2022. február 17.

1. Egy metrikus tér pontosan akkor teljes, ha teljesül benne, hogy nemüres zártak tetszőleges $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatára $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ esetén $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

2. A (szokásos triadikus) Cantor-halmaz és 2^ω homeomorfak.

3. a) Szeparábilis topologikus terek megszámlálható szorzata szeparábilis.
b) Teljesen metrizálható topologikus terek megszámlálható szorzata teljesen metrizálható.

4. Legyen adott az (X, d) metrikus tér, és tekintsük a kompakt részhalmazok $(\mathcal{K}(X), d_H)$ metrikus terét a Hausdorff metrikával.
Ekkor az $\{(x, K) \in X \times \mathcal{K}(X) : x \in K\}$ halmaz zárt $X \times \mathcal{K}(X)$-ben.

5. Metrikus terekre az alábbiak ekvivalensek:
(i) szeparábilis,
(ii) M_2,
(iii) minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik megszámlálható ε-háló,
(iv) ccc,
(v) öröklődően Lindelöf.

6.* Ha K kompakt metrizálható és Y lengyel tér, akkor $C(K, Y)$ lengyel.

Definíció. Legyen X topologikus tér, és $A \subseteq X$. A *Banach-Mazur játékot* két játékos, I és II játssza a következőképpen: I kezdésével felváltva választanak X-beli $U_0, V_0, U_1, V_1, \dots$ nemüres nyílt halmazokat, amikre teljesül, hogy $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$. I nyer, ha $\bigcap_n V_n \subseteq A$, különben II nyer.

7. Két játékos a Banach-Mazur játékot játssza $\mathbb{R}$-en.

(a) Ki nyer, ha $A = \mathbb{Q}$?

(b) Igaz-e, hogy ha II nyer, akkor A megszámlálható?

(c)** Mely halmazokra nyer II?

A feladatsorok elérhetőek a `http://keletita.web.elte.hu` oldalon.