2012. április 20.

Leíró halmazelmélet

8. feladatsor

1. Egy halmaz egy *porció*ján egy nyílt halmazzal vett nem üres metszetet értünk. Bizonyítsuk be, hogy lengyel térben egy $H \subset X$ halmaz pontosan akkor ambigus, ha minden nemüres zárt $F \subset X$ halmaznak van vagy H-tól diszjunkt porciója vagy olyan porciója, amely része H-nak!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha X, Y lengyel terek, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ parciálisan folytonos (azaz mindkét változójában folytonos), akkor f Baire-1 $X \times Y$-n!

A teljesség kedvéért a március 26.-i előadáson föladott feladatok:

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $B_1, B_2, \ldots$ Borel halmazok egy X lengyel térben, akkor X-en megadható olyan finomabb lengyel topológia, amelyben a $B_1, B_2, \ldots$ halmazok mind nyíltzártak!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha f valós értékű Borel függvény egy X lengyel téren, akkor X-en megadható olyan finomabb lengyel topológia, amely szerint f folytonos!

6. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-nak van olyan zárt részhalmaza, amely folytonos injektív módon $(0, 1)$-re képezhető!

7. Bizonyítsuk be, hogy a számegyenes bármely Borel halmaza előáll $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alkalmas zárt részének folytonos injektív képeként!