2012. április 13.

Leíró halmazelmélet

7. feladatsor

1. Bizonyítsuk be az alábbi halmazokról, hogy Borel halmazok! Próbáljuk őket minél szűkebb Borel-osztályba tenni!

   a) végtelenhez tartó sorozatok $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-ben,

   b) (HF) 0-hoz tartó sorozatok $[0,1]^{\mathbb{N}}$-ben,

   c) (HF) konvergens sorozatok $[0,1]^{\mathbb{N}}$-ben,

   d) (HF) azon valós számok halmaza, melyek kettes számrendszerbeli alakjában az 1-es számjegyek aránya $1/2$-hez tart,

   e) (HF) $C^1[0,1] \subset C[0,1]$.

2. Határozzuk meg az alábbi halmazok pontos Borel osztályát $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-ben!

   a) véges sok 1-est tartalmazó sorozatok,

   (HF) b) végtelen sok 1-est tartalmazó sorozatok,

   (HF) c) végtelen sok 1-est és végtelen sok 0-t tartalmazó sorozatok.

3. a) Adjunk meg $C^1[0,1]$-en, valamint általában $C^n[0,1]$-en $(n = 1, 2, \ldots)$ olyan természetes metrikát, amely lengyel teret ad!

   b) (HF) Bizonyítsuk be, hogy tipikus $C^1[0,1]$-beli függvény a 0-t véges sokszor veszi fel!

   c) (HF) Bizonyítsuk be, hogy $n = 2, 3, \ldots$ esetén tipikus $C^n[0,1]$-beli függvény minden értéket véges sokszor vesz fel!

4. (HF) Bizonyítsuk be, hogy ha az X lengyel téren definiált $f : X \to \mathbb{R}$ függvénynek megszámlálhatóan sok szakadási pontja van, akkor Baire-1!