2012. március 23.

Leíró halmazelmélet

5. feladatsor

Definíció. Egy $B \subset \mathbb{R}$ halmaz *Bernstein-halmaz*, ha sem B, sem $\mathbb{R} \setminus B$ nem tartalmaz nemüres perfekt halmazt.

1. Bizonyítsuk be, hogy létezik Bernstein halmaz!
2. a) Létezik-e Lebesgue mérhető Bernstein halmaz?

   b) Létezik-e Baire tulajdonságú Bernstein halmaz?
3. Milyen α-ra létezik univerzális Δ^0_α halmaz a síkon?
4. Mutassuk meg, hogy $[0,1]^{\omega_1}$ nem perfekt kompakt T_2 tér!

A teljesség kedvéért a március 19.-i előadáson föladott feladatok:

5. Bizonyítsuk be, hogy M_2 térben nyíltak/zártak szigorúan monoton növő/fogyó transzfinit sorozata csak megszámlálható lehet! (Ez 4 feladat akar lenni.)

Definíció. Adott X topologikus tér esetén definiáljuk X^α-t transzfinit rekurzióval a következő módon: legyen

$$X^0 = X,$$

$$X^\alpha = X^\beta \setminus \{X^\beta \text{ izolált pontjai}\}, \text{ ha } \alpha = \beta + 1,$$

$$X^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta, \text{ ha } \alpha \text{ limesz rendszám.}$$

Az X topologikus tér *Cantor-Bendixson rang*ján azt a minimális α-t értjük, amelyre $X^\alpha = X^{\alpha+1}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy a fenti X^α sorozat zárt halmazokból áll és fogyó!
7. Bizonyítsuk be, hogy a Cantor-Bendixson rang bármilyen megszámlálható rendszám lehet, sőt $K \subset \mathbb{Q}$ kompakt példa is van!
8. Adjunk a fentiek segítségével egy alternatív bizonyítást a Cantor-Bendixson tételre!